Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

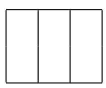
Mayo 2003

1. Expresar el número 60 como suma de tres "enteros positivos" de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

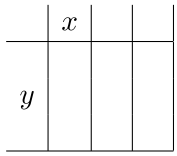
   Solución:

   Tenemos
   $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ y=2x \end{array}\right. \Longrightarrow z=60-3x$$
   El producto de los tres números es $P(x)=x\cdot y\cdot z=x\cdot 2x\cdot(60-x)=-6x^3+120x^2$, y este producto tiene que ser máximo.
   $$P'(x)=-18x^2+240x=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ -18x+240=0\Longrightarrow x=\frac{40}{3} \end{array}\right.$$
   Ahora tenemos que decidir el valor que corresponde a un máximo, para ello recurrimos a la segunda derivada
   $$P''(x)=-36x+240\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} P''(0)=240>0 \\ P''\left(\frac{40}{3}\right)=-240<0 \end{array}\right.$$
   Luego cuando $x=0$ tenemos un mínimo, y cuando $x=\dfrac{40}{3}$ es un máximo.
   Pero el problema nos dice sean "enteros positivos". Esto quiere decir que tendremos que decidirnos entre los dos números más próximos a $\dfrac{40}{3}$ que sean enteros, tenemos $13<\dfrac{40}{3}<14$, si sustituimos estos valores en la función $P(x)$ tendremos
   $$\left\{\begin{array}{l} P(13)=120\cdot 13^2-6\cdot 13^3=7098 \\ P(14)=120\cdot 14^2-6\cdot 14^3=7056 \end{array}\right.$$
   Los tres números buscados son $x=13$, $y=26$ y $z=60-3x=21$. El valor del producto será $P(13)=7098$.

2. Un solar rectangular de $11250\,m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales (ver dibujo) para su venta. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:



La función que hay que minimizar será $L = 6x + 4y$. Y sabemos que

$$S = 3x \cdot y = 11250 \Longrightarrow y = \frac{11250}{3x} = \frac{3750}{x} \Longrightarrow L(x) = 6x + \frac{15000}{x}$$

Para obtener los máximos y los mínimos utilizamos la primera derivada $L(x) = 0$.

$$L'(x) = 6 - \frac{15000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50,\ y = L(50) = 75$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que

$$L''(x) = \frac{30000}{x^3} \Longrightarrow L''(50) = \frac{30000}{50^3} > 0$$

Luego $x = 50$ es un mínimo, y podemos concluir con que la parcela tiene que tener de dimensiones $3x = 150\,m$ e $y = 75\,m$ para utilizar la menor valla posible.

3. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $4\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 4 \Longrightarrow y = 4 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(4-x)}{2} = \dfrac{4x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 2$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 2$ e $y = 2$, con un área $S(2) = 2\ u^2$

4. Halla la longitud de los lados del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea $60\,m$.

Solución:

Sea a la longitud de la base de este triángulo isósceles y b la de los dos lados iguales, sea h la altura sobre a de este triángulo, que dividirá a dicha base en dos partes iguales, formando dos triángulos rectángulos con los lados b. Tendremos que el área viene dado por $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$, pero por otra parte tenemos que $h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$, que sustituyendo en la primera expresión, y teniendo en cuenta $a + 2b = 60 \Longrightarrow a = 60 - 2b$, quedaría

$$S = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{(60 - 2b) \cdot \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{60 - 2b}{2}\right)^2}}{2} =$$

$$(30 - b) \cdot \sqrt{b^2 - (30 - b)^2} = (30 - b) \cdot \sqrt{b^2 - (900 + b^2 - 60b)} \Longrightarrow$$

$$S(b) = (30 - b) \cdot \sqrt{60b - 900}$$

Derivamos e igualamos a cero esta derivada

$$S'(b) = -\sqrt{60b - 900} + (30 - b) \cdot \frac{60}{2 \cdot \sqrt{60b - 900}} =$$

$$-\sqrt{60b - 900} + (30 - b) \cdot \frac{30}{\sqrt{60b - 900}} = \frac{-(\sqrt{60b - 900})^2 + (30 - b) \cdot 30}{\sqrt{60b - 900}} =$$

$$\frac{-(60b - 900) + (900 - 30b)}{\sqrt{60b - 900}} = \frac{-60b + 900 + 900 - 30b}{\sqrt{60b - 900}} = \frac{1800 - 90b}{\sqrt{60b - 900}}$$

$$S'(b) = \frac{1800 - 90b}{\sqrt{60b - 900}} = 0 \Longrightarrow b = 20, \quad a = 20$$

Para comprobar si se trata de un máximo recurrimos a la segunda derivada y calculamos $S''(20)$

$$S''(b) = \frac{-90 \cdot \sqrt{60b - 900} - (1800 - 90b) \cdot \dfrac{60}{2 \cdot \sqrt{60b - 900}}}{(\sqrt{60b - 900})^2} =$$

$$\frac{-90(60b - 900) - 30(1800 - 90b)}{(60b - 900)^{3/2}} = \frac{5400b + 81000 - 54000 + 2700b)}{(60b - 900)^{3/2}} \Longrightarrow$$

$$S''(b) = \frac{2700(1 - 10b)}{(60b - 900)^{3/2}} \Longrightarrow S''(20) = -3\sqrt{3} < 0$$

Luego es un máximo.

5. Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

   Solución:

   Sean los números x e y tenemos que $P = x \cdot y$, y sabemos que $x + y^2 = 48 \Longrightarrow x = 48 - y^2$, sustituyendo en la primera función tenemos que $P(y) = y(48 - y^2) = 48y - y^3$. Para calcular el máximo calculamos la primera derivada e igualamos a cero, $P'(y) = 0$.

   $P'(y) = 48 - 3y^2 = 0 \Longrightarrow y^2 = 16 \Longrightarrow y = 4,\ y = -4$ con ambas tenemos que $x = 32$. Comprobamos si es máximo o mínimo con la segunda derivada.

   $P''(x) = -6y \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P''(-4) = 24 \\ P''(4) = -24 \end{array} \right. \Longrightarrow$ cuando $y = -4$ tenemos un mínimo, mientras que cuando $y = 4$ es máximo. La solución buscada es, por tanto, $x = 32$ e $y = 4$.

6. Se ha construido un gran depósito cilíndrico de $81\pi\, m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta $30\, euros/m^2$, y las dos bases con un material que cuesta $45\, euros/m^2$.

   (a) Determina la relación que hay entre el radio, r, de las bases circulares y la altura, h, del cilindro, y da el coste, $C(r)$, del material necesario para construir este depósito en función de r.

   (b) ¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios para construirlo sea el mínimo posible?.

   (c) ¿Cúal será, en este caso, el coste del material?.

   Solución:

   (a) Sabemos que

   $$V = \pi r^2 \cdot h = 81\pi \Longrightarrow h = \frac{81}{r^2}$$

   $$C(r) = 2\pi r h \cdot 30 + 2 \cdot \pi r^2 \cdot 45 = \frac{4860}{r}\pi + 90\pi r^2$$

   (b) Para que este coste sea mínimo calculamos su derivada e igualamos a cero $C'(r) = 0$.

   $$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r = 0 \Longrightarrow -4860 + 180\pi r^3 = 0 \Longrightarrow$$

$$r^3 = 27 \Longrightarrow r = 3\,m,\;\; h = 9\,m$$

Calculamos la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$C''(r) = \frac{4860\pi \cdot 2r}{r^4} + 180\pi \Longrightarrow C''(3) = 540\pi > 0$$

Por tanto, en $r = 3m$, $h = 9m$, hay un mínimo.

(c) El coste del material será $C(3) = \dfrac{4860}{3} r + 90\pi 3^2 = 2430\pi\, euros.$

7. Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

La función es $y^2 = 4x \Longleftrightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$, un punto genérico de la curva sería $(x, \pm 2\sqrt{x})$, cuya distancia al punto $(4, 0)$ será la función

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Para minimizar esta función recurrimos a la primera derivada

$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{12}{(x^2 - 4x + 16)\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Longrightarrow d''(2) = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Para $x = 2$ tenemos que $y^2 = 4 \cdot 2 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ luego los puntos buscados son $(2, 2\sqrt{2})$ y $(2, -2\sqrt{2})$.

8. A partir de una cartulina cuadrada de $60cm$ de lado se va a construir caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados elimininados tienen $10cm$ de lado. Decidir si la observación es correcta o no.

Solución:

Sea x la longitud del lado del cuadrado recortado, esto quiere decir que, la base de la caja es un cuadrado de lado $60 - 2x$ y la altura de la caja será x. El volumen de la caja será

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = (3600 + 4x^2 - 240x)x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

Para que este volumen sea máximo utilizamos la primera derivada

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \Longrightarrow x = 30,\ x = 10$$

Para comprobar cúal de estos valores es el máximo recurrimos a la segunda derivada

$$V''(x) = 24x - 480 \Longrightarrow \begin{cases} V''(30) = 240 > 0 \\ V''(10) = -240 < 0 \end{cases}$$

Luego cuando $x = 30$ el volumen es mínimo, mientras que cuando $x = 10$ el volumen es máximo y, por tanto, la observación es correcta.

9. Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

   Solución:

   Si el lado del primer cuadrado es x su perímetro es $4x$.
   El perímetro del segundo cuadrado será $12x$, y su lado $3x$
   El perímetro del tercer cuadrado será $4y$
   La suma de los perímetros será $4x+12x+4y = 1248 \Longrightarrow y = 312-4x$
   El área del primer cuadrado es x^2
   El área del segundo cuadrado es $9x^2$
   El área del tercer cuadrado es $y^2 = (312-4x)^2$
   La función suma de áreas que hay que minimizar será

   $$S(x) = x^2 + 9x^2 + (312-4x)^2 = 26x^2 - 2496x + 97344$$

   Para calcular el mínimo derivamos

   $$S'(x) = 52x - 2496 = 0 \Longrightarrow x = 48$$

   Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada $S''(x) = 52 > 0 \Longrightarrow$ mínimo.

   Las dimensiones de los campos son:

   El primer campo tiene de lado $48m$
   El segundo campo tiene de lado $144m$
   El tercer campo tiene de lado $120m$