

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Marzo 2003

Problema 1 (4 puntos) Se consideran las cónicas C_1 y C_2 , cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

- (2 puntos) Identificar C_1 y C_2 . Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).
- (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1 .

Solución:

- $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \implies \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \implies \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.

Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \implies c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.

$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \implies \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \implies \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.

Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \implies c = \sqrt{16 + 9} = 5$

Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$

Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0, 0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

- Focos: $(-5, 0)$ $(5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abscisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.

Como pasa por el vértice $(-4, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} -4 = & & c \\ 0 = & 9a + & 3b + & c \\ 0 = & 9a - & 3b + & c \end{cases} \implies c = -4, \quad a = \frac{4}{9} \quad y \quad b = 0 \implies x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$

Problema 2 (3 puntos)

1. (1 punto) Calcula el área de un triángulo de vértices $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(1, -3, 2)$.
2. (1 punto) Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s : \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

- 1.

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, -3); \quad \overrightarrow{AC} = (0, -4, 0)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(-12, 0, 0)| = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{12}{2} = 6$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s :

$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases} \implies 3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \implies t = -3 \implies P(-9, -1, -4)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\vec{u} = (3, 1, 0) \times (4, -3, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -13)$$

La recta pedida es

$$x + 9 = \frac{x + 1}{-3} = \frac{z + 4}{13}$$

Problema 3 (3 puntos)

1. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene centro $C(1, 4)$ y es tangente a la recta $s : 3x + 4y - 4 = 0$
2. Determinar el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 4)$.

Solución:

1.

$$r = d(C, s) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

Luego la ecuación buscada es $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

2. La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, y sustituyendo los puntos dados en la ecuación tenemos:

$$\begin{cases} p = 0 \\ 2n + p + 4 = 0 \\ 2m + 4n + p + 20 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m = -2a = -6 \\ n = -2b = -2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ r = \sqrt{10} \end{cases}$$

En conclusión, el centro es $C(3, 1)$, el radio $r = \sqrt{10}$ y la ecuación de la circunferencia pedida será $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$.