Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 2 *(2 puntos)* Los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, 3)$, $C(2, 3, -1)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1,0,3)$ y $\overrightarrow{BC} = (0,2,-4)$.
   Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (0,2,-4) = (x_0-1, y_0-1, z_0)$ y por tanto $x_0 = 1,\ y_0 = 3\ z_0 = -4$, el punto será $D(1,3,-4)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-6,4,2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{14}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10} \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0+4+16} = \sqrt{20}$$

   Es decir, los lados del paralelogramo no son iguales, y por tanto, sólo queda por comprobar si es un rectángulo, para comprobarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un rectángulo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1,0,3)$ y $\overrightarrow{AD} = (0,2,-4)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{200}} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

   no es rectángulo.

Problema 3 *(3 puntos)* Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{lrrrr} \pi_1: & x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ \pi_2: & 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ \pi_3: & -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}\right.$$

Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}A = 2$

Calculamos ahora el rango de $\overline{A}$, calculamos el determinante
$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3.$

En conclusión $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3:

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 4 *(3 puntos)* Probar que las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{array} \right.$$

se cortan en un punto y calcular el ángulo que forman.

Solución:
Calculamos el vector director de la recta s:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 3j = (-3, -3, 0) = -3(1, 1, 0)$$

Calculamos un punto de s, para ello hacemos $x = 0$, y obtenemos $P_2(0, 0, 1)$.
En resumen, podemos escribir lo siguiente:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} P_1(3, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} P_1(0, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0) \end{array} \right.$$

Calculamos un vector $\overrightarrow{P_2P_1} = (3, 2, 2)$ y construimos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como el rango de A es dos, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y además $|\overline{A}| = 0$ podemos concluir que Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 2$, luego las dos rectas se cortan.

$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = 45^{\text{o}}$$