Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2003

1. Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{array} \right. \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

2. Calcular por la regla de L'Hôpital

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$$

(b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x + 2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

3. Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

4. Calcular:

(a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^{\infty}]=\infty$$

(b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

(c)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

5. Calcular:

(a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{4}$$

(b)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)}{x} \cdot (\cos x + 1) = 0$$