Examen de Matemáticas II (Coordinador 2003)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos).*Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$

Solución:

$$f(0) = 4 \Longrightarrow D = 4$$

$$f'(x) = A\cos x + 2Bx + C \text{ como } f'(0) = 0 \Longrightarrow A + C = 0$$

$$f''(x) = -A\sin x + 2B \Longrightarrow A = -3, \ B = -5$$

Luego $A = -3$, $B = -5$, $C = 3$ y $D = 4$:

$$f(x) = -3\sin x - 5x^2 + 3x + 4$$

Problema 2 *(2 puntos).* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx$$

Solución:

$$\frac{x^2+4}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-2}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{5x-2}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6}$$

$$5x - 2 = A(x-2) + B(x-3)$$

Si $x = 2 \Longrightarrow 8 = -B \Longrightarrow B = -8$

Si $x = 3 \Longrightarrow 13 = A \Longrightarrow B = 13$. Luego:

$$\frac{x^2+4}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{13}{x-3} - \frac{8}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx + 13\int \frac{1}{x-3}\,dx - 8\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$x + 13\ln|x-3| - 8\ln|x-2| = x + \ln\frac{|x-3|^{13}}{|x-2|^8}$$

www.musat.net

Problema 3 *(3 puntos)*.Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 punto). Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 punto). Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 punto). Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

a)

$$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M-2)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M-2)M = I \Longrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M-2)$$

b)

$$M^2 = 2M + 3I \Longrightarrow M^3 = (2M+3I)M =$$

$$2M^2 + 3M = 2M^2 + 3M = 2(2M+3I) + 3M = 7M + 6I$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$3I + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a^2+b^2 = 3+2a \\ 2ab = 2b \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=1, \ \ b=\pm 2 \\ a=-1, \ \ b=0 \\ a=3, \ \ b=0 \end{array} \right.$$

Las matrices serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

www.musat.net

Problema 4 *(3 puntos)* Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

a) (1,5 punto). Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano π.

b) (1,5 punto). Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta r.

Solución:

a) Calculamos una recta perpendicular a π que pase por el punto $M(1,1,1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π:

$$(1 + \lambda + (1 + \lambda) - 2(1 - 2\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = 1$$

$$M'(2, 2, -1)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M' - M = (4, 4, -2) - (1, 1, 1) = (3, 3, -3)$$

b) Calculamos un plano perpendicular a π que contenga al punto M:

$$2x + 3y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 + 3 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta, para ello ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$2(1 + 2\lambda) + 3(3\lambda) - (-1 - \lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{14}$$

www.musat.net

$$M'\left(\frac{8}{7},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M'=\frac{M''+M}{2}\Longrightarrow M''=2M'-M=2\left(\frac{8}{7},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)-(1,1,1)=$$

$$\left(\frac{9}{7},-\frac{4}{7},-\frac{22}{7}\right)$$

www.musat.net

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2003)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*.Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a + c \Longrightarrow c = 0 \\ c + d = d \Longrightarrow c = 0 \\ a + b = b + d \Longrightarrow a = d \end{cases}$$

La matriz buscada es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)*.Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto). Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k^2 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -k^2 + 4k - 3 = 0 \Longrightarrow k = 1, \;\; k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow$Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 3 \\ 2x- & 3y= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Si $k = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 3 \\ 2x- & 3y= & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1,1,1), \;\; B(0,-2,2) \;\; C(-1,0,2) \;\; D(2,-1,-2).$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) (1 punto). Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-3,1) \quad \overrightarrow{AC} = (-2,-1,1) \quad \overrightarrow{AD} = (1,-2,-3)$$

a)

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{array}{rrr} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right| = \frac{5}{2}\,u^3$$

b)

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,-3,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,-1,1) \\ A(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \left|\begin{array}{rrr} -1 & -2 & x-1 \\ -3 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$2x + y + 5z - 8 = 0$$

$$d(D,\pi) = \frac{|4-1-10-8|}{\sqrt{4+1+25}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{2}\;u$$

www.musat.net

c)

$$r = \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,5) \\ D(2,-1,-2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

a) (1 punto). Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (0,5 puntos). Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

d) (1 punto). Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

Solución:

a) Monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}\right) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en $(-\infty, -1/2)$ y decreciente en $(-1/2, \infty)$. Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{4}\right)$ tenemos un Máximo.

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} = 0$$

Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal.

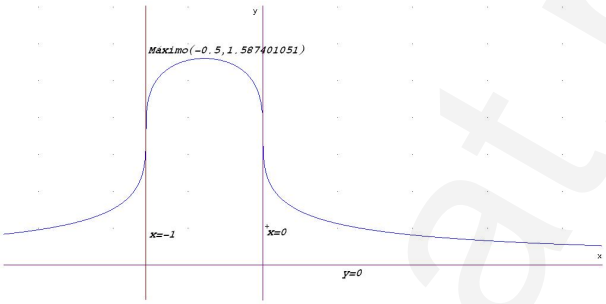
www.musat.net

- Oblicuas: No hay

b)

$$f'(a) = \infty \Longrightarrow \sqrt[3]{a^2(a+1)^2} = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = -1$$

c) Representación gráfica



d)

$$\int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})\, dx = \left. \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} \right]_{-1}^{1} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\; u^2$$

www.musat.net