Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

2 de Diciembre de 2002

En este examen puedes escoger los tres problemas que quieras, pero debes de tener en cuenta la puntuación de cada uno de ellos.

Problema 1 *(4 puntos)* Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 0\\ & ay+ & 2z= & 4\\ & 2y+ & az= & 4 \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 2\\ 0 & 2 & a \end{array}\right)$ y la matriz ampliada $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & a & 2 & 4\\ 0 & 2 & a & 4 \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 2\\ 0 & 2 & a \end{array}\right| = \left|\begin{array}{rr} a & 2\\ 2 & a \end{array}\right| = a^2-4=0 \Longrightarrow a=\pm 2$$

- Si $a\neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a=-2$: $A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4\\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A|=0$ y además hay un menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ 0 & -2 \end{array}\right| = -2\neq 0$ y por tanto, el Rango$(A)=2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

  $$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right| = -8-8=-16\neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A})=3.$$

  Concluyendo:
  Rango$(A)=2\neq$ Rango$(\overline{A})=3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 2:$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$

  En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A}$ <n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  Vamos a resolverlo:

  Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & 2y+ & 2z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y = & & -z \\ & y = & 2 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x = & 2(1-\lambda) \\ y = & 2-\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.
2. Tomando $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

1. Una matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, $|A| \neq 0$ y recíprocamente.

   $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda = -2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1$$

   Es decir, para estos dos valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, el determinante de la matriz A es cero y por tanto la matriz A no tiene inversa.

   Para que la matriz A tenga inversa tiene que ser $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

2. Si $\lambda = 1$, por el apartado anterior tendríamos que $|A| = 0$. Calculamos el rango de A que deberá de ser menor de 3.

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

   Por tanto, Rango $A = 2 <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, ya que es un sistema homogeneo, y por el menor escogido podemos despreciar la primera ecuación; quedará el sistema siguiente:

   $$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & y & & = 0 \\ & y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} x+ & y & = & 0 \\ & y & = & -z \end{array} \right.$$

   Si llamamos $z = t$ tenemos $y = -t$ y $x = t$, es decir, la solución sería:

   $$\left\{ \begin{array}{rr} x = & t \\ y = & -t \\ z = & t \end{array} \right.$$

Problema 3 *(3 puntos)* Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz identidad.

1. Demostrar que A admite inversa, y obtenerla en función de A.

2. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$, halla para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$, y para esos valores escribir la matriz inversa de A

Solución:

1. Tenemos que $A^2 = 2A + I \Longrightarrow A^2 - 2A = I \Longrightarrow (A - 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A - 2I$

2. Calculamos B^2

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2+1 \end{pmatrix}$$

Como $B^2 = 2B + I$ tendremos

$$\begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+m) & 2 \\ 2 & 2(1-m) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+m)+1 & 2 \\ 2 & 2(1-m)+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+m)^2+1 = 2(1+m)+1 \\ (1-m)^2+1 = 2(1-m)+1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lr} m^2+2m+2 = & 2m+3 \\ m^2-2m+2 = & -2m+3 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2 = 1 \\ m^2 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow m = \pm 1$$

Para $m = 1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Para $m = -1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 4 *(3 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-14 = 5(y+z-28) \\ x+10 = y+z+20 \\ x-42 = y-z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126 = 0 \\ x- & y- & z- & 10 = 0 \\ x- & y+ & z- & 42 = 0 \end{array} \right.$$

Multiplicamos la 2^{a} ecuación por -5 y la sumamos a la 1^{a}:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126 = 0 \\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow -4x + 176 = 0 \Longrightarrow x = 44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\left\{ \begin{array}{rr} y+z= & 34 \\ y-z= & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=18 \\ z=16 \end{array} \right.$$