

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato
Junio 2002-Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r :

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \quad \pi : \vec{u}_\pi = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_\pi = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 2 (2 puntos) Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

1. (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
2. (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son: $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y $\vec{BC} = (-1, 1, 1)$.

Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\vec{BC} = \vec{AD} \implies (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\vec{AB} \times \vec{BC}|$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \implies Area = |\vec{AB} \times \vec{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC}

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \implies \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 3 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a .
- (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.
- (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

- Sean las matrices A y \overline{A} siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \implies a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas; el sistema sería compatible determinado.

Si $a = 0$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies Rango(\bar{A}) = 3$$

- En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

2. Si $a = -1$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, $Rango(\bar{A}) = 2$.

- En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\bar{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas \implies El sistema es compatible indeterminado.

3. Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

4. Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \implies z =$

$$-\frac{1}{2} \implies \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ Es decir:}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f .
- (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f .
- (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

- Calculamos el dominio:

- Si $x \geq -1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único posible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.

- En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

Calculamos la continuidad:

La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supuesto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

- En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$

Luego f es continua en $x = -1$.

- En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego no es continua en $x = 0$.

- En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

2. Asíntotas verticales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:

Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x} = 3$$

Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

3. El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$ (el eje de abscisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x} dx &= \int_1^2 \left(x + 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x| \right]_1^2 = \\ &= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$



