Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Abril 2025

Problema 1 (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{-3x}{x^2+1}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su simetría.

b) (2 puntos) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

a) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -3x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

$f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ la función es impar.

b) $f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

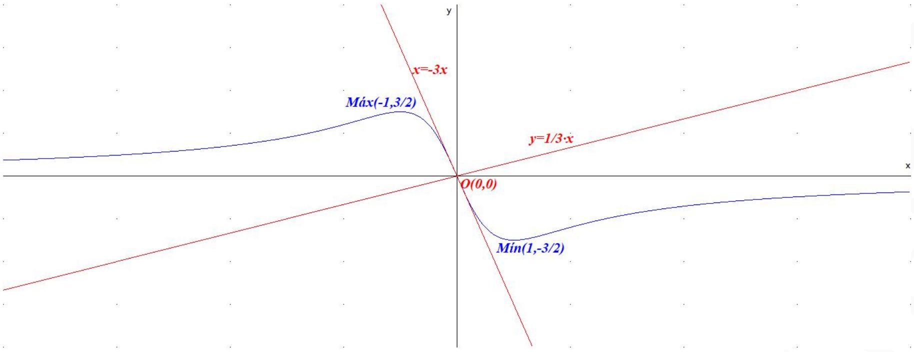
La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, decreciente en el intervalo $(-1,1)$ con un máximo relativo en $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$

c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$: Como $m = f'(0) = -3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y = -3x$$

$$\text{Recta Normal}: \ y = \frac{1}{3}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0,0)$.



Problema 2 (2 puntos) Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x=-1$ y en $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-ax+b}{2} & \text{si} \quad x<-1 \\ x+a & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ \dfrac{2x-b}{2} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{-ax+b}{2}=\dfrac{a+b}{2} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1}(x+a)=-1+a \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a+b}{2}=-1+a\Longrightarrow a-b=2$$

Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x+a)=1+a \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{2x-b}{2}=\dfrac{2-b}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{2-b}{2}=1+a\Longrightarrow 2a+b=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} a-b=2 \\ 2a+b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2/3 \\ b=-4/3 \end{array}\right.$$

Problema 3 (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x^2+3x-18|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x)=x^2+3x-18\Longrightarrow g'(x)=2x+3=0\Longrightarrow x=-3/2$:

x	y
0	-18
-6	0
3	0
$-3/2$	$-81/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$.
La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + 3x - 18 & \text{si} & x \le -6 \\ -(x^2 + 3x - 18) & \text{si} & -6 < x \le 3 \\ x^2 + 3x - 18 & \text{si} & 3 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -6$:

$$\lim_{x \longrightarrow -6^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -6} (x^2 + 3x - 18) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -6} (-x^2 - 3x + 18) = 0$$

$$f(-6) = 0$$

Y f es continua en $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (-x^2 - 3x + 18) = 0$$

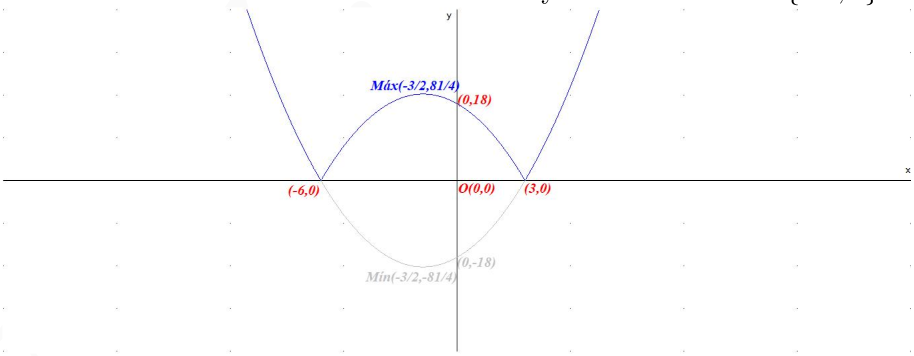
$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (x^2 + 3x - 18) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 3 & \text{si} & x < -6 \\ -2x - 3 & \text{si} & -6 < x < 3 \\ 2x + 3 & \text{si} & 3 < x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -6$: $f'(-6^-) = -9$ y $f'(-6^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -6$.
Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -9$ y $f'(3^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 3$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-6, 3\}$.

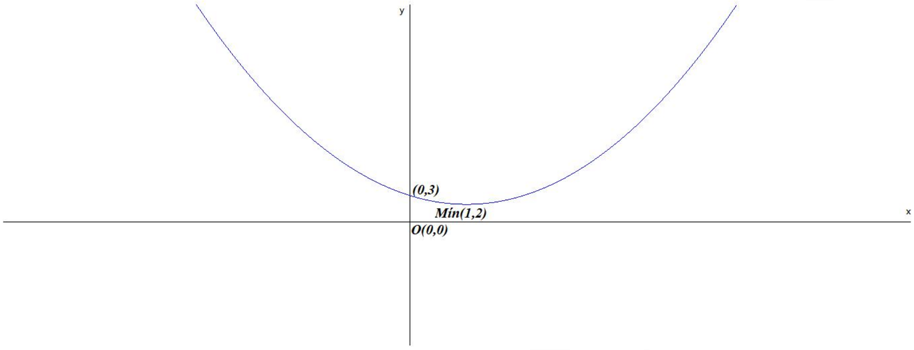


Problema 4 (1 punto) Dada la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 2)$. Decidir de que extremo se trata.
Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \Longrightarrow c = 3 \\ f(1) = 2 \Longrightarrow a - 2b + c = 2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^2 - 2x + 3$
$f'(x) = 2x - 2$ y $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0$ luego en $x = 1$ hay un mínimo.



Problema 5 (2 puntos) calcular dos números reales positivo que cumplan: uno de ellos sumado al otro elevado al cuadrado es 150 y el producto de ellos sea máximo.

Solución:
$y + x^2 = 150 \Longrightarrow y = 150 - x^2$
$P(x, y) = xy \Longrightarrow P(x) = x(-x^2 + 150) = -x^3 + 150x$
$P'(x) = -3x^2 + 150 = 0 \Longrightarrow x = 5\sqrt{2}$, la solución negativa es irrelevante.
$P''(x) = -6x \Longrightarrow P''(5\sqrt{2}) = -30\sqrt{2} < 0 \Longrightarrow x = 5\sqrt{2}$ es un máximo relativo.
Los números pedidos son $x = 5\sqrt{2}$ e $y = 150 - (5\sqrt{2})^2 = 100$.
El producto máximo sería $P(5\sqrt{2}) = -6(5\sqrt{2})^3 + 150 = 500\sqrt{2}$