

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2025

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Puntos de Corte

• Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 5x = 0 \implies (0, 0)$ con OX .

• Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	-	+

d) $f(-x) = -f(x) \implies$ la función es impar.

e) Asíntotas:

• **Verticales:** No hay

• **Horizontales:** $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x^2 + 1} = 0$

• **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

$$f) f'(x) = -\frac{5(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

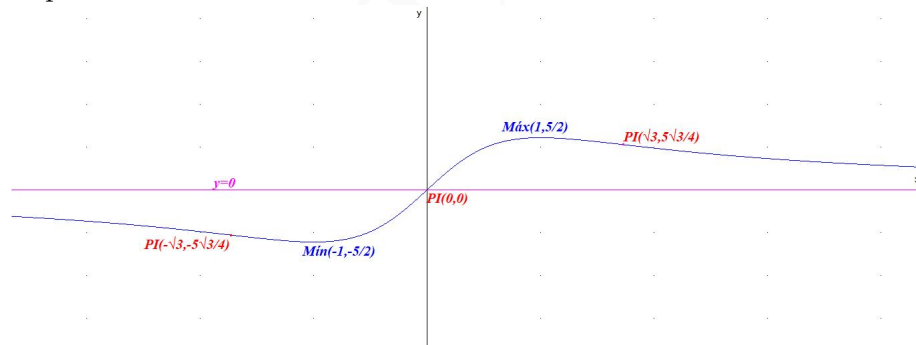
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, creciente en el intervalo $(-1, 1)$ con un mínimo relativo en $(-1, -\frac{5}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{5}{2})$

$$g) f''(x) = \frac{10x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies 10x(x^2 - 3) = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}, x = 0$$

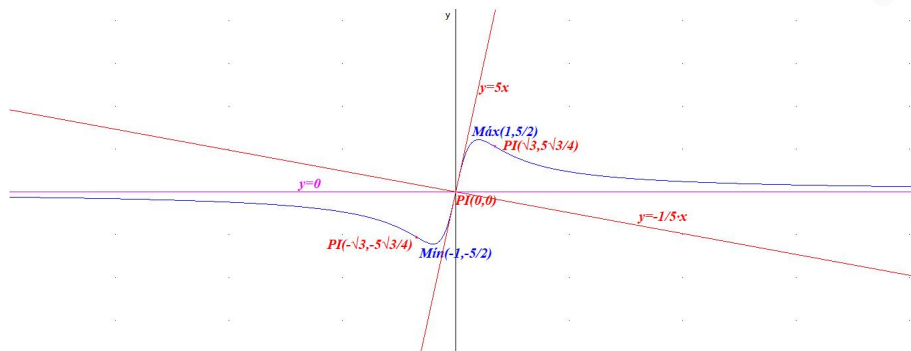
	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

Convexa: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, cóncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ y con puntos de inflexión en $(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4})$.

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:



Como $m = f'(0) = 5$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y = 5x$$

$$\text{Recta Normal : } y = -\frac{1}{5}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0, 0)$.