Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

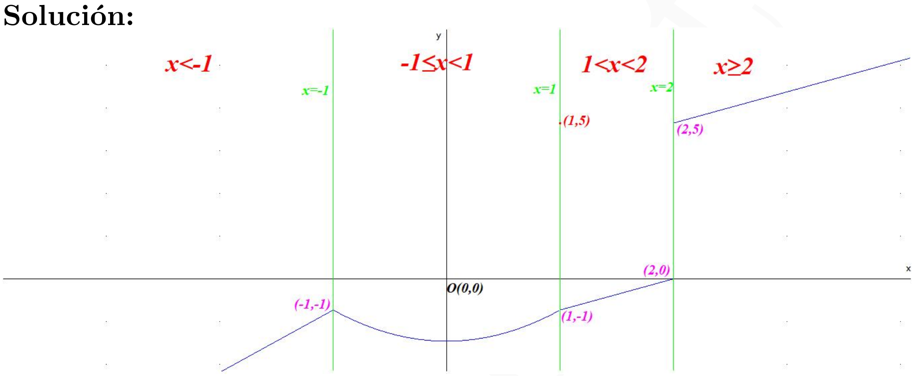
Marzo 2025

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x = 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x + 3 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx^2 - x + a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^2 + bx + 1) = a + b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2bx^2 - x + a) = 2b - 1 + a$$

$$a + b + 1 = 2b - 1 + a \Longrightarrow b = 2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4bx - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a + b; \;\; f'(1^+) = 4b - 1 \Longrightarrow 2a + b = 4b - 1 \Longrightarrow 2a - 3b = -1$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 5/2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2a}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ x + b & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \dfrac{ax - b}{3} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{x - 2a}{2} = \dfrac{-1 - 2a}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} (x + b) = -1 + b \end{cases} \Longrightarrow \frac{-1 - 2a}{2} = -1 + b \Longrightarrow 2a + 2b = 1$$

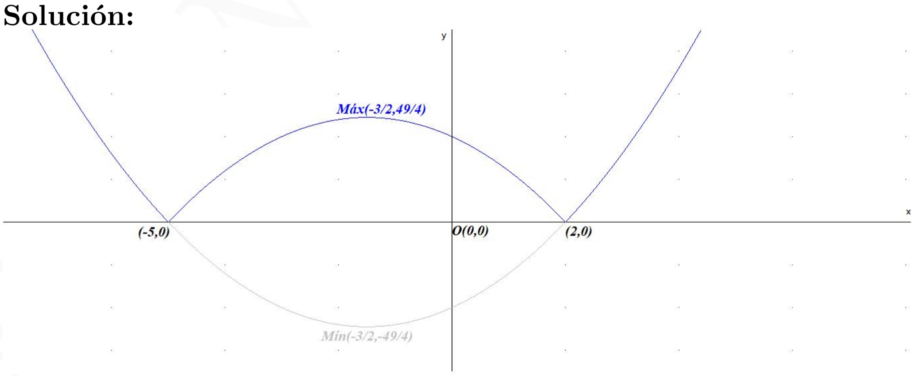
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x + b) = 1 + b \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{ax - b}{3} = \dfrac{a - b}{3} \end{cases} \Longrightarrow 1 + b = \frac{a - b}{3} \Longrightarrow a - 4b = 3$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = 1 \\ a - 4b = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3/2$:

x	y
0	-10
-5	0
2	0
$-3/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 + 3x - 10 & \text{si} & x \le -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si} & -5 < x \le 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

y f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x + 3 & \text{si} & x < -5 \\ -2x - 3 & \text{si} & -5 < x < 2 \\ 2x + 3 & \text{si} & 2 < x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -5$: $f'(-5^-) = -7$ y $f'(-5^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -5$.
Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -7$ y $f'(2^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 + 2ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 3)$.

Decidir de que extremo se trata.
Solución:

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 4ax + b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(3) = 3 \Longrightarrow 18a + 3b + c + 27 = 3 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 12a + b + 27 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -55/18 \\ b = 29/3 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \dfrac{55}{9}x^2 + \dfrac{29}{3}x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - \dfrac{110}{9}x + \dfrac{29}{3}$ y $f''(x) = 6x - \dfrac{110}{9} \Longrightarrow f''(3) = 18 - \dfrac{110}{9} = \dfrac{52}{9} > 0 \Longrightarrow x = 3$ es un mínimo relativo.