

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Febrero 2025

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) \neq 0 \implies$ No hay.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -8 \implies (0, -8)$.

c)

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	-	+

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.

e) Asíntotas:

• **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty$$

• **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1} = -\infty$$

• **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 8}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{x - 1} \right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = 2x$

f)

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^2} = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = -1 \quad x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, -6)$ y un mínimo relativo en $(3, 10)$.

g)

$$f''(x) = \frac{16}{(x - 1)^3} \neq 0$$

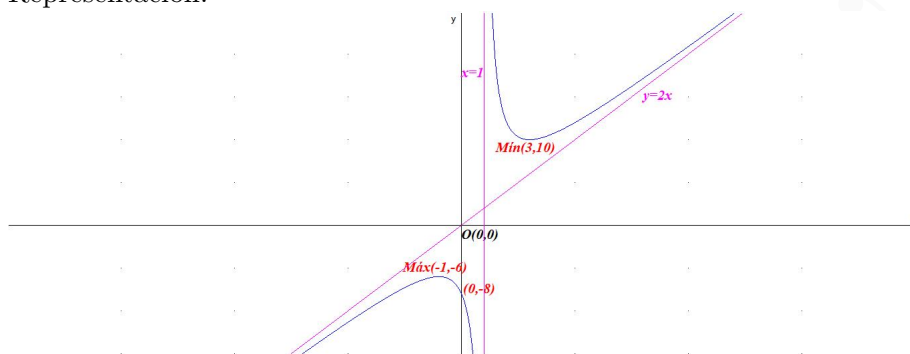
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪

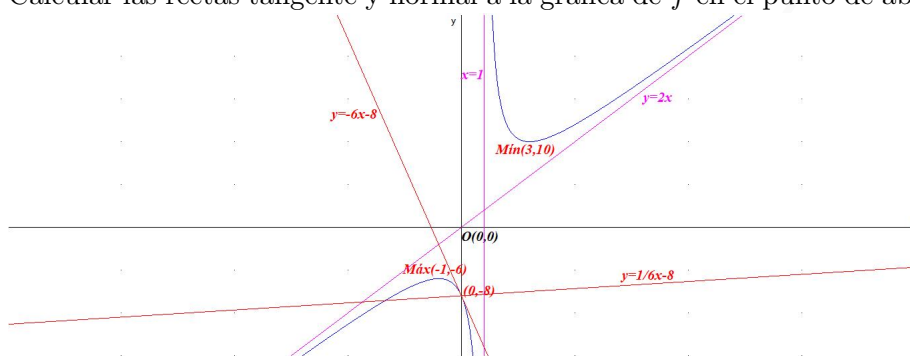
Cóncava: $(1, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:



Como $m = f'(0) = -6$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 8 = -6x \implies y = -6x - 8$$

$$\text{Recta Normal : } y + 8 = \frac{1}{6}x \implies y = \frac{1}{6}x - 8$$

Como $f(0) = -8$ las rectas pasan por el punto $(0, -8)$.