

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Febrero 2025

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- Puntos de Corte
 - ☛ Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 3x^2 = 0 \implies (0, 0)$.
 - ☛ Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	+	-	+

- $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- Asíntotas:

• **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty$$

• **Horizontales:** $y = 3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = 3$$

• **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{6x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-		
$f(x)$	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función tiene un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

g)

$$f''(x) = \frac{6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} \neq 0$$

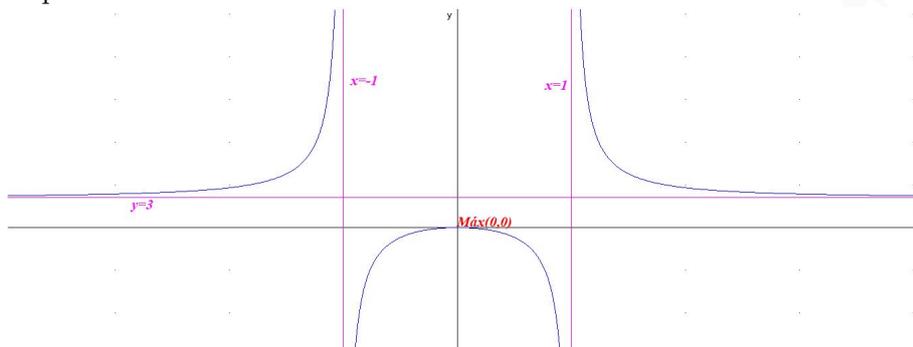
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

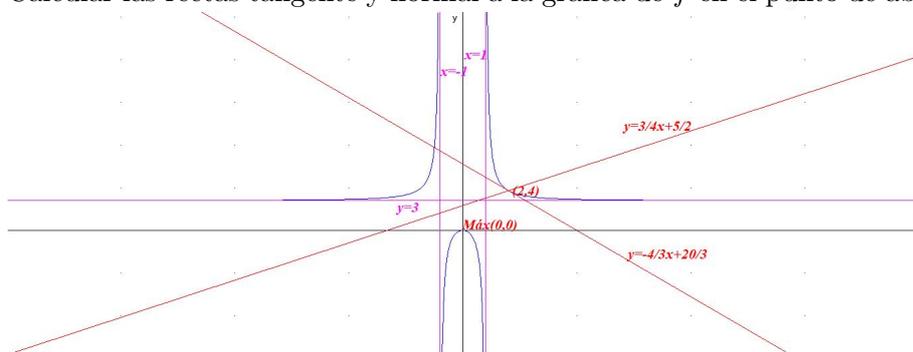
Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Convexa: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:



Como $m = f'(2) = -\frac{4}{3}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 2) \implies y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$$

$$\text{Recta Normal : } y - 4 = \frac{3}{4}(x - 2) \implies y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

Como $f(2) = 4$ las rectas pasan por el punto $(2, 4)$.