Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Febrero 2025

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $7x - 3y - 1 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 7) \\ A(1, 2) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (1, 2) + \lambda(3, 7)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 7\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{7}$
- General: $7x - 3y - 1 = 0$
- Explícita: $y = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{1}{3}$
- Punto pendiente: $y - 2 = \dfrac{1}{3}(x - 1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \alpha = 18^\circ 26' 6''$

Problema 2 (5 puntos) Si los puntos $A(-5, -3)$, $B(6, 0)$ y $C(1, 7)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular

a) (1,5 puntos) el circuncentro.

b) (2 puntos) sus ángulos y decidir que tipo de triángulo es.

c) (1,5 puntos) calcular la longitud de la altura sobre el lado AB y la ecuación de la recta que la define.

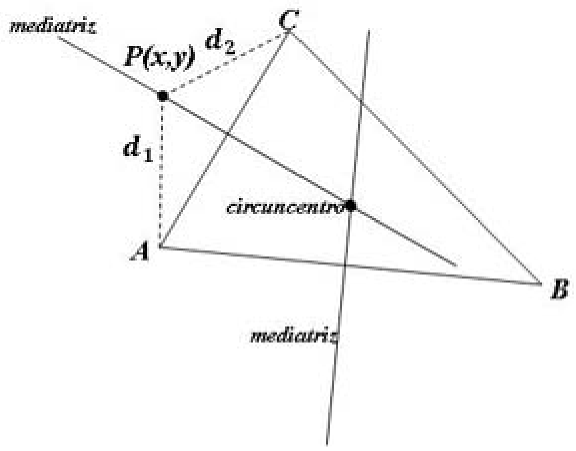
Solución:

a)
- Mediatriz entre A y B:

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} \Longrightarrow 2(11x + 3y - 1) = 0$$

- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} \Longrightarrow 4(3x + 5y - 4) = 0$$



- Circuncentro:

$$\left\{\begin{array}{l} 11x+3y=1 \\ 3x+5y=4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(-\frac{7}{46},\frac{41}{46}\right)$$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(11,3)| = \sqrt{130}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(6,10)| = 2\sqrt{34}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{66+30}{\sqrt{130}\cdot 2\sqrt{34}} \Longrightarrow \hat{A} = 43^\circ 46' 52''$$

$|\overrightarrow{BA}| = |(-11,-3)| = \sqrt{130}$, $|\overrightarrow{BC}| = |(-5,7)| = \sqrt{74}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{55-21}{\sqrt{130}\cdot\sqrt{74}} \Longrightarrow \hat{B} = 69^\circ 43' 3''$$

$|\overrightarrow{CA}| = |(-6,-10)| = 2\sqrt{34}$, $|\overrightarrow{CB}| = |(5,-7)| = \sqrt{74}$:

$$\cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-30+70}{2\sqrt{34}\cdot\sqrt{74}} \Longrightarrow \hat{C} = 66^\circ 30' 5''$$

Se trata de un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (11,3) \perp \overrightarrow{u} = (3,-11)$:
La recta que define la altura es $3x - 11y + \lambda = 0$ como tiene que pasar por $C(1,7) \Longrightarrow 3 - 77 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 74 \Longrightarrow h : 3x - 11y + 74 = 0$
La recta que pasa por A y por B sería $11x + 3y + k = 0$, y como pasa por el punto $B(6,0) \Longrightarrow 66 + 0 + k = 0 \Longrightarrow k = -66 \Longrightarrow t : 11x + 3y - 66 = 0$

$$\text{Altura} = d(C,t) = \frac{|77+21-66|}{\sqrt{121+9}} = \frac{16\sqrt{130}}{65}\ u$$

Problema 3 (3 puntos) Sea el punto $A(-2,7)$ y la recta $r : x - 6y + 2 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

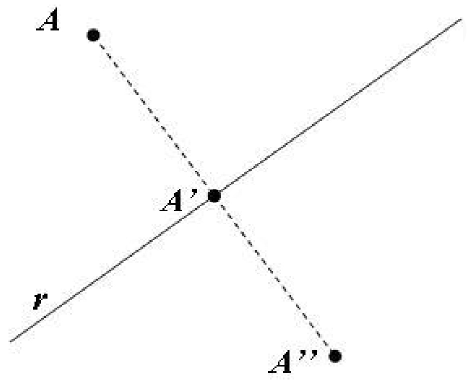
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s : 6x + y + 2 = 0$.

Solución:

a) $x - 6y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow -2 - 42 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 44$. La recta buscada es $h : x - 6y + 44 = 0$

b) $6x + y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow -12 + 7 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$. La recta buscada es $t : 6x + y + 5 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte A' entre r y t:

$$\left\{\begin{array}{l} r : x - 6y + 2 = 0 \\ t : 6x + y + 5 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A'\left(-\frac{32}{37}, \frac{7}{37}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(-\frac{32}{37}, \frac{7}{37}\right) - (-2, 7) = \left(\frac{10}{37}, -\frac{245}{37}\right)$$

d)

$$d(P, r) = d(P, s) \Longrightarrow \frac{|x - 6y + 2|}{\sqrt{37}} = \frac{|6x + y + 2|}{\sqrt{37}} \Longrightarrow |x - 6y + 2| = |6x + y + 2|$$

- $x - 6y + 2 = 6x + y + 2 \Longrightarrow 5x + 7y = 0$
- $x - 3y + 4 = -6x - y - 2 \Longrightarrow 7x - 2y + 6 = 0$