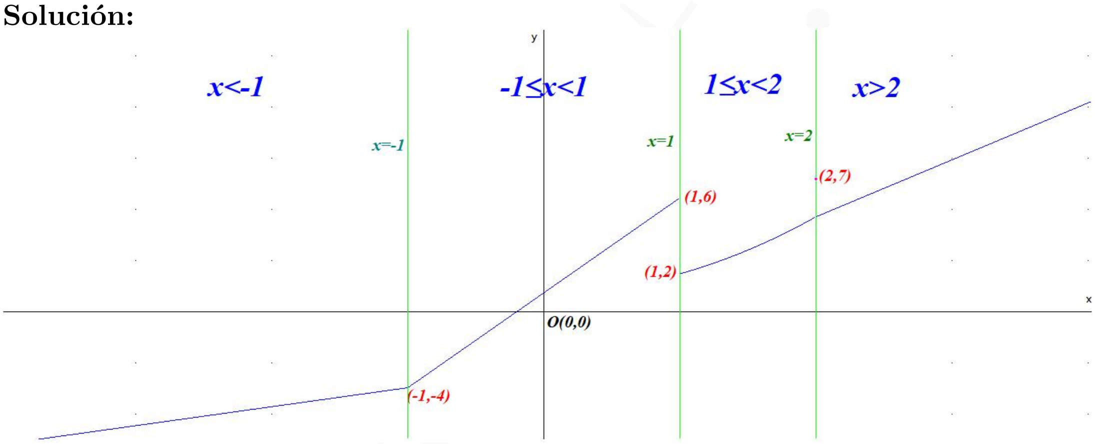
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)
Mayo 2025

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 5x+1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 7 & \text{si} \quad x = 2 \\ 3x-1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua, en $x = 1$ es discontinua no evitable(salto), y en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable(agujero)

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - x + b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx^2 + 3x - a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (3ax^2 - x + b) = 3a - 1 + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2bx^2 + 3x - a) = 2b + 3 - a$$

$$3a-1+b=2b+3-a \Longrightarrow 4a-b=4$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll}6ax-1 & \text{si} & x<1\\ 4bx+3 & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right.$$

$$f'(1^-)=6a-1;\ \ f'(1^+)=4b+3 \Longrightarrow 6a-1=4b+3 \Longrightarrow 6a-4b=4$$

$$\left\{\begin{array}{l}4a-b=4\\ 6a-4b=4\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{6}{5}\\ b=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{18}{5}x^2-x+\dfrac{4}{5} & \text{si} & x<1\\ \dfrac{8}{5}x^2+3x-\dfrac{6}{5} & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right. \Longrightarrow f'(x)=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{36}{5}x-1 & \text{si} & x<1\\ \dfrac{16}{5}x+3 & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right.$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c\in[0,2]/f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{56/5-4/5}{2}=\frac{26}{5}$$

Si $c<1:\ \ f'(c)=\dfrac{36}{5}c-1=\dfrac{26}{5}\Longrightarrow c=\dfrac{31}{36}$ solución válida.

Si $c\geq 1:\ \ f'(c)=\dfrac{16}{5}c+3=\dfrac{26}{5}\Longrightarrow c=\dfrac{11}{16}$ solución no válida.

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x=-1$ y en $x=1$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{4x+a}{2} & \text{si} & x<-1\\ 2bx-1 & \text{si} & -1\leq x<1\\ \dfrac{ax+b}{4} & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right.$$

Solución:

Continuidad en $x=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{4x+a}{2}=\dfrac{-4+a}{2}\\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1}(2bx-1)=-2b-1\\ f(-1)=-2b-1\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{-4+a}{2}=-2b-1\Longrightarrow a+4b=2$$

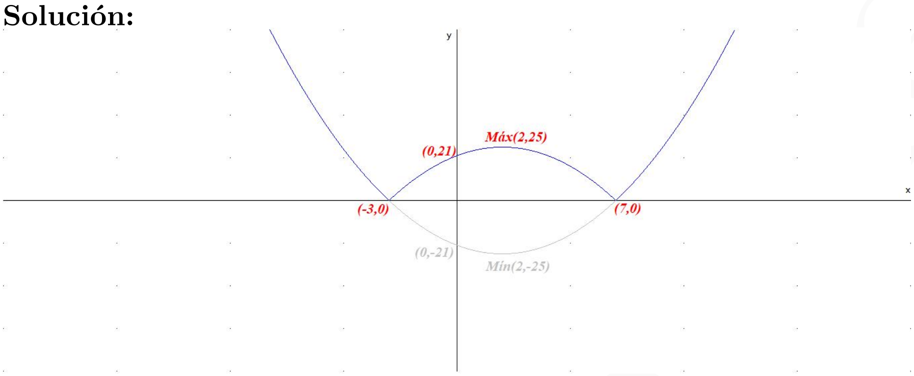
Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2bx-1)=2b-1\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{ax+b}{4}=\dfrac{a+b}{4}\\ f(1)=\dfrac{a+b}{4}\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a+b}{4}=2b-1\Longrightarrow a-7b=-4$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+4b=2 \\ a-7b=-4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-2/11 \\ b=6/11 \end{array}\right.$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x^2-4x-21|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x)=x^2-4x-21 \Longrightarrow g'(x)=2x-4=0 \Longrightarrow x=2$:

x	y
0	-21
-3	0
7	0
2	-25

$g''(x)=2 \Longrightarrow g''(2)=2>0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(2,-25)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(2,25)$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} x^2-4x-21 & \text{si} & x\le -3 \\ -(x^2-4x-21) & \text{si} & -3<x\le 7 \\ x^2-4x-21 & \text{si} & 7\le x \end{array}\right.$$

f es continua en $x=-3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -3}(x^2-4x-21)=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -3}(-x^2+4x+21)=0$$

$$f(-3)=0$$

y f es continua en $x=7$:

$$\lim_{x\longrightarrow 7^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 7}(-x^2+4x+21)=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 7^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 7}(x^2-4x-21)=0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 4 & \text{si} & x \leq -3 \\ -2x + 4 & \text{si} & -3 < x \leq 7 \\ 2x - 4 & \text{si} & 7 \leq x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -10$ y $f'(-3^+) = 10$, luego no es derivable en $x = -3$.

Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -10$ y $f'(7^+) = 10$, luego no es derivable en $x = 7$.

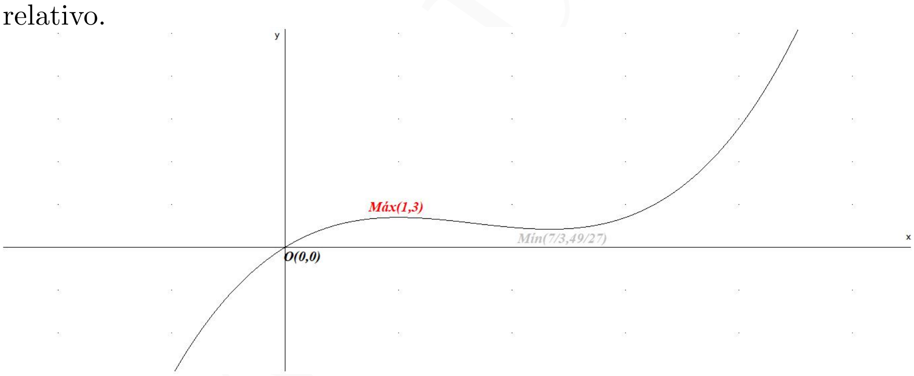
Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 7\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 2bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 3)$. Decidir de que extremo se trata.
Solución:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow -a + 2b + c + 1 = 3 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow -2a + 2b + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 7/2 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$
$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$ y $f''(x) = 6x - 10 \Longrightarrow f''(1) = -4 < 0 \Longrightarrow x = 1$ es un máximo relativo.



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^x - 2x + a & \text{si} & x < 0 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

a) Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en $\mathbb{R}$.

b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(e^x - 2x + a) = 1 + a \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x}{x+2} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 1 + a = 0 \Longrightarrow a = -1$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es continua, luego f es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = -1$.

b) Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ccc} e^x - 2 & \text{si} & x < 0 \\ \dfrac{2}{(x+2)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1/2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.