

Examen de Estadística

Mayo 2023

Problema 1 Se sabe que 1 de cada 4 alumnos de un colegio manifiestan escuchar música clásica. Se eligen 9 alumnos al azar y se pide calcular las siguientes probabilidades:

- a) (0,5 puntos) Ninguno escucha música clásica.
- b) (0,5 puntos) Todos escuchan música clásica.
- c) (0,75 puntos) Dos o menos de dos escuchan música clásica.
- d) (0,75 puntos) Más de dos escuchan música clásica.
- e) (0,75 puntos) tres o más de tres pero menos de 6 escuchan música clásica.

Solución:

$$B(9; 0,25), \quad p = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \text{y} \quad q = 1 - p = 0,75$$

a) $P(X = 0) = \binom{9}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^9 = 0,07508468627$

b) $P(X = 9) = \binom{9}{9} \cdot 0,25^9 \cdot 0,75^0 = 3,814697265 \cdot 10^{-6}$

c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
 $\binom{9}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^9 + \binom{9}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^8 + \binom{9}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^7 = 0,6006774902$

d) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,6006774902 = 0,3993225097$

e) $P(3 \leq X < 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
 $\binom{9}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^6 + \binom{9}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^5 + \binom{9}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^4 = 0,3893280029$

Problema 2 Entre la población de un municipio se sabe que 11 de cada 100 jóvenes estudian algún instrumento musical en el conservatorio municipal. Si cogemos una muestra de 150 jóvenes elegidos aleatoriamente. Se pide:

- a) (0,5 puntos) ¿Qué distribución se ajustaría a la situación planteada? ¿Qué tipo de distribución utilizaríamos para el tratamiento de datos? Calcular sus parámetros.
- b) (0,5 puntos) Probabilidad de que 18 de ellos estudien algún instrumento.
- c) (0,5 puntos) Probabilidad de que 14 como mínimo y menos de 19 de ellos estudien algún instrumento.

- d) (0,5 puntos) Probabilidad de que más de 13 y menos de 15 de ellos estudien algún instrumento.
- e) (0,5 puntos) Probabilidad de que más de 18 y menos de 21 de ellos estudien algún instrumento.
- f) (0,5 puntos) Probabilidad de que menos de 14 de ellos estudien algún instrumento.
- g) (0,5 puntos) Si en un festival hay 1100 jóvenes ¿cuántos de ellos estudian algún instrumento?

Solución

a)

$$p = 0,11, \quad q = 1 - p = 0,89, \quad n = 150 \implies B(150; 0,11)$$

Como $n = 150 > 10$, $np = 16,5 > 5$ y $nq = 133,5 > 5$:

$$\mu = np = 16,5, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 62,01129 \implies N(16,5; 3,832)$$

- b) $P(X = 18) = P\left(\frac{17,5 - 16,5}{3,832} \leq Z \leq \frac{18,5 - 16,5}{3,832}\right) =$
 $P(0,26 \leq Z \leq 0,52) = P(Z \leq 0,52) - P(Z \leq 0,26) = 0,6985 - 0,6026 = 0,0959$
- c) $P(14 \leq X < 19) = P\left(\frac{13,5 - 16,5}{3,832} \leq Z \leq \frac{18,5 - 16,5}{3,832}\right) =$
 $P(-0,78 \leq Z \leq 0,52) = P(Z \leq 0,52) - P(Z \leq -0,78) = P(Z \leq 0,52) - (1 - P(Z \leq 0,78)) = 0,6985 - (1 - 0,7823) = 0,4808$
- d) $P(13 < X < 15) = P\left(\frac{13,5 - 16,5}{3,832} \leq Z \leq \frac{14,5 - 16,5}{3,832}\right) =$
 $P(-0,78 \leq Z \leq -0,52) = P(Z \leq 0,78) - P(Z \leq 0,52) = 0,7823 - 0,6985 = 0,0838$
- e) $P(18 < X < 21) = P\left(\frac{18,5 - 16,5}{3,832} \leq Z \leq \frac{20,5 - 16,5}{3,832}\right) =$
 $P(0,52 \leq Z \leq 1,04) = P(Z \leq 1,04) - P(Z \leq 0,52) = 0,8508 - 0,6985 = 0,1523$
- f) $P(X < 14) = P\left(Z \leq \frac{13,5 - 16,5}{3,832}\right) =$
 $(Z \leq -0,78) = 1 - P(Z \leq 0,78) = 1 - 0,7823 = 0,2177$
- g) Si $n = 1100$ entonces $E[X] = np = 1100 \cdot 0,11 = 121$ estudian algún instrumento.

Problema 3 Se van a hacer unas pruebas de violín. Se sabe que el tiempo de empleado por los alumnos se comporta como una distribución normal de media 10 minutos con una desviación típica de 2 minutos.

Elegido un violinista al azar se pide calcular las siguientes probabilidades:

- a) (0,5 puntos) Emplea más de 13 minutos.
 b) (0,75 puntos) Emplea entre 14 y 16 minutos.
 c) (0,75 puntos) Emplea entre 8 y 12 minutos.
 d) (0,75 puntos) Emplea entre 7 y 9 minutos.
 e) (0,5 puntos) Emplea menos de 8 minutos.

Solución:

$$N(531, 25)$$

- a) $P(X \geq 13) = P\left(Z \geq \frac{13 - 10}{2}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$
- b) $P(14 \leq X \leq 16) = P\left(\frac{14 - 10}{2} \leq Z \leq \frac{16 - 10}{2}\right) = P(2 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq 2) = 0,9987 - 0,9772 = 0,0215$
- c) $P(8 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{8 - 10}{2} \leq Z \leq \frac{12 - 10}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 0,6826$
- d) $P(7 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{7 - 10}{2} \leq Z \leq \frac{9 - 10}{2}\right) = P(-1,5 \leq Z \leq -0,5) = P(Z \leq -0,5) - P(Z \leq -1,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) - (1 - P(Z \leq 1,5)) = 0,9332 - 0,6915 = 0,2417$
- e) $P(X \leq 8) = P\left(Z \leq \frac{7 - 10}{2}\right) = P(Z \leq -1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$