

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Febrero 2023

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$
- Puntos de Corte
 - ☛ Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 = 0 \implies (0, 0)$.
 - ☛ Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	+	-	+

- $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- Asíntotas:

• **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

$x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

• **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 9} = 1$$

• **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{18x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 3) \cup (3, \infty)$.

La función tiene un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

g)

$$f''(x) = \frac{54(x^2 + 3)}{(x^2 - 9)^3} \neq 0$$

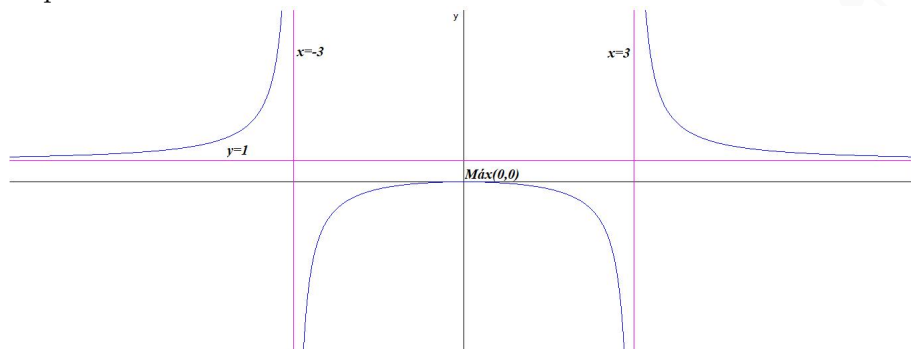
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

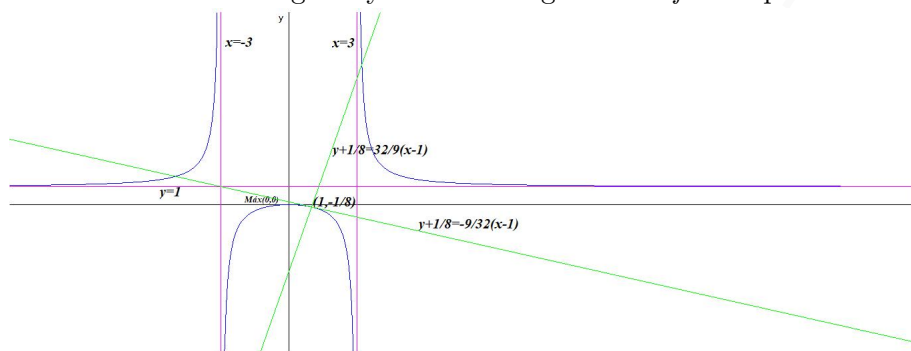
Cóncava: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Convexa: $(-3, 3)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:



Como $m = f'(1) = -\frac{9}{32}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{1}{8} = -\frac{9}{32}(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{1}{8} = \frac{32}{9}(x - 1)$$

Como $f(1) = -\frac{1}{8}$ las rectas pasan por el punto $\left(1, -\frac{1}{8}\right)$.