# Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

**Marzo 2023**

---

**Problema 1** Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-3,0)$, $B(0,5)$ y $C(5,0)$. Obtener su centro, su radio.

**Solución:**

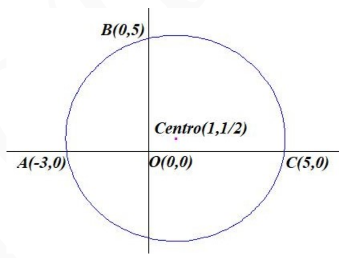
$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\begin{cases} -3m + p = -9 \\ 10n + p = -25 \\ 5m + p = -25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = -1 \\ p = -15 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x - y - 15 = 0$$

$$\begin{cases} m = -2a = -2 \Longrightarrow a = 1 \\ n = -2b = -1 \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2} \\ p = -15 = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \dfrac{\sqrt{65}}{2} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad r = \frac{\sqrt{65}}{2}$$




**Problema 2** Sea $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

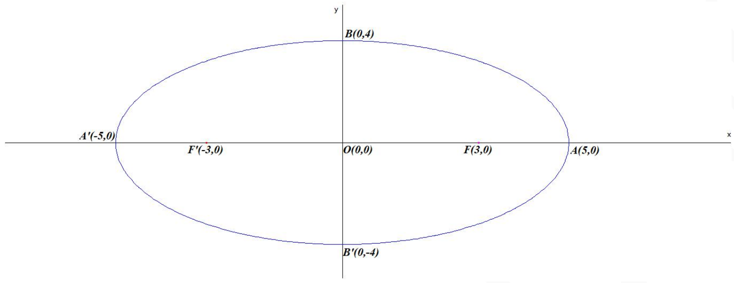
**Solución:**

$$a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5, \quad b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c = 3 \quad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

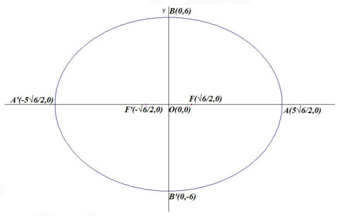
Eje Mayor$= 2a = 10$
Eje Menor$= 2b = 8$
Distancia Focal$= 2c = 6$

Excentricidad$= e = \dfrac{3}{5}$
Vértices: $A(5,0),\ A'(-5,0),\ B(0,4),\ B(0,-4)$
Focos: $F\,(3,0),\ F'\,(-3,0)$
Ecuación general: $16x^2 + 25y^2 = 400$




**Problema 3** De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 6 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{5}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

**Solución:**




$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{5} \Longrightarrow a = 5c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 25c^2 = 36 + c^2 \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$a = 5c = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

Eje Mayor$= 2a = 5\sqrt{6}$
Eje Menor$= 2b = 12$
Distancia Focal$= 2c = \sqrt{6}$
Excentricidad$= e = \dfrac{1}{5}$
Vértices: $A\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{2}, 0\right),\ A'\left(-\dfrac{5\sqrt{6}}{2}, 0\right),\ B(0,6),\ B'(0,-6)$
Focos: $F\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, 0\right),\ F'\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{75/2} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Ecuación general: $24x^2 + 25y^2 = 900$

**Problema 4** Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1}$$

que se encuentran a una distancia 5 del punto $P(1,1)$.
**Solución:**
Construimos la circunferencia de centro $P$ y radio 7:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Cortamos $r$ con esta circunferencia; para ello ponemos $r$ en paramétricas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \end{array} \right.$
y sustituimos en la circunferencia:

$$(1 + 2\lambda - 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 25 \Longrightarrow 5\lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2,4, \;\; \lambda_2 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -2,4 \Longrightarrow P_1(-3,8; 2,4) \\ \lambda_2 = 2 \Longrightarrow P_2(5,-2) \end{array} \right.$$

**Problema 5** Se quiere construir un canal cerrado alrededor de una finca. Para llenar de agua esta estructura se recurre a dos pozos situados en los puntos $(3,0)$ y $(0,3)$. La suma de las distancias desde cualquier punto del canal a estos dos pozos tiene que ser constante e igual a 8 $u$, de esa manera se obtiene un nivel y presión de agua óptimo. Con estos datos se pide:

a) Identifica la curva descrita por el canal.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Hay que hacer desagües cuando $x = 1$, calcular los puntos de desagüe y las tangentes a la curva en esos puntos.

d) En caso de rotura del canal, en alguno de sus puntos, se produciría la destrucción de lo construido en un círculo de 2 $u$. Queremos poner un valioso objeto en el punto $(1,1)$, ¿sería aconsejable?
$u = 100$ metros.

**Solución:**

a) Se trata de una elipse por definición.

b) Sea $P(x, y)$ un punto de esa elipse, sean $F(3, 0)$ y $F'(0, 3)$ sus focos, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{FP}| + |\overrightarrow{F'P}| = 8 \Longrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 8$$

$$(x-3)^2 + y^2 = (8 - \sqrt{x^2 + (y-3)^2})^2 \Longrightarrow$$

$$-3x + 3y - 32 = -8\sqrt{(x^2 + (y-3)^2} \Longrightarrow$$

$$55x^2 + 18xy - 192x + 55y^2 - 192y - 448 = 0$$

c) Si $x = 1 \Longrightarrow 55y^2 - 174y - 585 = 0 \Longrightarrow y_1 = -2,042890412$ e $y_2 = 5,206526776$. Los puntos en los que tenemos que calcular las tangentes son $H(1; 5,206526776)$ y $Q(1; -2,042890412)$. Calculamos la derivada de la función:

$$110xdx + 18xdy + 18ydx - 192dx + 110ydy - 192dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(110x + 18y - 192)dx + (18x + 110y - 192)dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(18x + 110y - 192)dy = -(110x + 18y - 192)dx \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{110x + 18y - 192}{18x + 110y - 192}$$

La pendiente $m_1$ de la recta pendiente en $Q(1; -2,042890412)$ es:

$$m_1 = -02978848301$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y + 2,042890412 = -02978848301(x-1)$$

La pendiente $m_2$ de la recta pendiente en $H(1; 5,206526776)$ es:

$$m_2 = -0,02938789714$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y - 5,206526776 = -0,02938789714(x-1)$$

d) El objeto no corre peligro por esta circunstancia.