Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2023

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $2x - 5y + 1 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (5, 2) \\ A(-3, -1) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (-3, -1) + \lambda(5, 2)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y+1}{2}$
- General: $2x - 5y + 1 = 0$
- Explícita: $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{1}{5}$
- Punto pendiente: $y + 1 = \dfrac{2}{5}(x + 3)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = \dfrac{2}{5} \Longrightarrow \alpha = 21^\circ 48' 5''$

Problema 2 (5 puntos) Si los puntos $A(-3, -2)$, $B(5, 0)$ y $C(1, 4)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular

a) (1,5 puntos) el circuncentro.

b) (2 puntos) sus ángulos y decidir que tipo de triángulo es.

c) (1,5 puntos) calcular la longitud de la altura sobre el lado AB y la ecuación de la recta que la define.

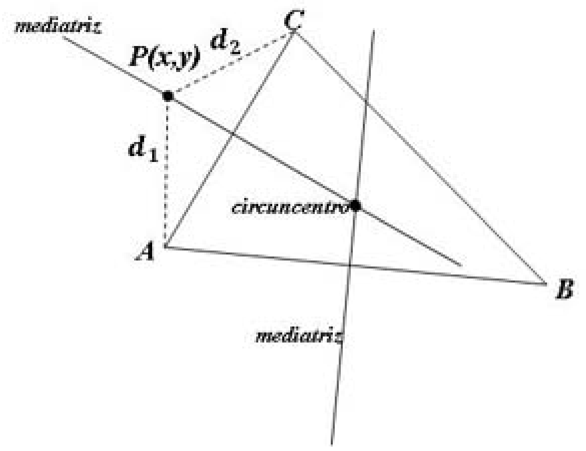
Solución:

a)
- Mediatriz entre A y B:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} \Longrightarrow 4x + y = 3$$

- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \Longrightarrow 2x + 3y = 1$$



- Circuncentro:
$$\left\{\begin{array}{l} 4x+y=3 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8,2)| = 2\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(4,6)| = 2\sqrt{13}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{32+12}{2\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{13}} \Longrightarrow \hat{A} = 42^\circ 16' 25''$$

$|\overrightarrow{BA}| = |(-8,-2)| = 2\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{BC}| = |(-4,4)| = 4\sqrt{2}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{32-8}{2\sqrt{17}\cdot 4\sqrt{2}} \Longrightarrow \hat{B} = 59^\circ 2' 11''$$

$|\overrightarrow{CA}| = |(-4,-6)| = 2\sqrt{13}$, $|\overrightarrow{CB}| = |(4,-4)| = 4\sqrt{2}$:

$$\cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-16+24}{2\sqrt{13}\cdot 4\sqrt{2}} \Longrightarrow \hat{C} = 78^\circ 41' 24''$$

Se trata de un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (8,2) \perp \overrightarrow{u} = (2,-8)$:
La recta que une A y B: $2x - 8y + \lambda = 0$ como tiene que pasar por $B(5,0) \Longrightarrow 10 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -10 \Longrightarrow t: 2x - 8y - 10 = 0$

$$\text{Altura} = d(C,t) = \frac{|2-32-10|}{\sqrt{4+64}} = \frac{20\sqrt{17}}{17}\ u$$

La recta que define esta altura tiene de ecuación $h_1: 8x + 2y + \lambda = 0$ y, como pasa por $C(1,4)$, tenemos $8 + 8 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -16 \Longrightarrow h_1: 8x + 2y - 16 = 0 \Longrightarrow h_1: 4x + y - 8 = 0$

Problema 3 (3 puntos) Sea el punto $A(1,5)$ y la recta $r : x - 3y + 4 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

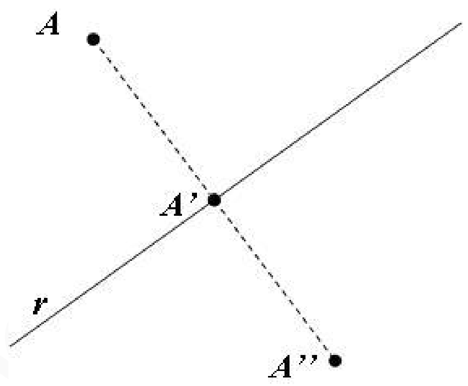
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s : 3x - y + 2 = 0$.

Solución:

a) $x - 3y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 1 - 15 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -14$. La recta buscada es $h : x - 3y - 14 = 0$

b) $3x + y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 3 + 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -8$. La recta buscada es $t : 3x + y - 8 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\left\{ \begin{array}{l} r : x - 3y + 4 = 0 \\ t : 3x + y - 8 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow A'(2,2)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2(2,2) - (1,5) = (3,-1)$$

d)

$$d(P,r) = d(P,s) \Longrightarrow \frac{|x-3y+4|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}} \Longrightarrow |x-3y+4| = |3x-y+2|$$

- $x - 3y + 4 = 3x - y + 2 \Longrightarrow 2x + 2y - 2 = 0 \Longrightarrow x + y - 1 = 0$
- $x - 3y + 4 = -3x + y - 2 \Longrightarrow 4x - 4y + 6 = 0 \Longrightarrow 2x - 2y + 3 = 0$