Examen de Estadística
Mayo 2022

Problema 1 Se sabe que 12 de cada 100 personas vacunadas con cierta vacuna pueden desarrollar una enfermedad que los transforman de zombis. En una sala hay 9 enfermos ingresados diagnosticados con esa enfermedad. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

a) (0,5 puntos) Ninguno de ellos está vacunado.

b) (0,5 puntos) Todos están vacunados.

c) (0,75 puntos) Tres o menos de tres están vacunados.

d) (0,75 puntos) Más de tres están vacunados.

e) (0,75 puntos) Dos o más de dos pero menos de cinco están vacunados.

Solución:

$$B(9;0,12),\ \ p=\frac{12}{100}=0,12 \text{ y } q=1-p=0,88$$

a) $P(X=0)=\binom{9}{0}\cdot 0,12^0\cdot 0,88^9=0,3164783818$

b) $P(X=9)=\binom{9}{9}\cdot 0,12^9\cdot 0,88^0=5,159780351\cdot 10^{-9}$

c) $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$
$\binom{9}{0}\cdot 0,12^0\cdot 0,88^9+\binom{9}{1}\cdot 0,12^1\cdot 0,88^8+\binom{9}{2}\cdot 0,12^2\cdot 0,88^7+\binom{9}{3}\cdot 0,12^3\cdot 0,88^6=$
$0,9841502797$

d) $P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-0,9841502797=0,01584972021$

e) $P(2\leq X<5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$
$\binom{9}{2}\cdot 0,12^2\cdot 0,88^7+\binom{9}{3}\cdot 0,12^3\cdot 0,88^6+\binom{9}{4}\cdot 0,12^4\cdot 0,88^5=0,2930548529$

Problema 2 El número de contagios crece de forma alarmantemente a nivel nacional. Un día determinado ha habido de 34000 infectados que se transformarán en breve. Sabemos que 13 de cada 100 podrán recuperarse y al resto habría que sacrificarlos. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

a) (0,5 puntos) ¿Qué distribución se ajustaría a la situación planteada? ¿Qué tipo de distribución utilizaríamos para el tratamiento de datos? Calcular sus parámetros.

b) (0,5 puntos) Probabilidad de que se recuperen 4515 infectados.

c) (0,5 puntos) Probabilidad de que se recuperen 4317 como mínimo y menos de 4512 infectados.

d) (0,5 puntos) Probabilidad de que se recuperen más de 4490 y 4531 o menos infectados.

e) (0,5 puntos) Probabilidad de que se recuperen más 4325 pero menos de 4589 infectados.

f) (0,5 puntos) Probabilidad de que se recuperen menos de 4305 infectados.

g) (0,5 puntos) Si se han recibido en un hospital a 415 personas infectadas ¿cuántas se recuperarán?

Solución

a)
$$p = 0,13,\;\; q = 1 - p = 0,87,\;\; n = 34000 \Longrightarrow B(34000; 0,13)$$

Como $n > 10$, $np = 4420 > 5$ y $nq = 29580 > 5$:

$$\mu = np = 4420,\;\; \sigma = \sqrt{npq} = 62,01129 \Longrightarrow N(4420; 62,01129)$$

b) $P(X = 4515) = P\left(\frac{4514,5 - 4420}{62,01129} \le Z \le \frac{4515,5 - 4420}{62,01129}\right) =$
$P(1,52 \le Z \le 1,54) = P(Z \le 1,54) - P(Z \le 1,52) = 0,9382 - 0,9357 = 0,0025$

c) $P(4316,5 < X < 4511,5) = P\left(\frac{4316,5 - 4420}{62,01129} \le Z \le \frac{4511,5 - 4420}{62,01129}\right) =$
$P\left(-1,67 \le Z \le 1,48\right) = P(Z \le 1,48) - P(Z \le -1,67) = P(Z \le 1,48) - (1 - P(Z \le 1,67)) = 0,9306 - (1 - 0,9525) = 0,8831$

d) $P(4490,5 < X < 4531,5) = P\left(\frac{4490,5 - 4420}{62,01129} \le Z \le \frac{4531,5 - 4420}{62,01129}\right) =$
$P\left(1,14 \le Z \le 1,8\right) = P(Z \le 1,8) - P(Z \le 1,14) = 0,9641 - 0,8729 = 0,0912$

e) $P(4325,5 < X < 4588,5) = P\left(\frac{4325,5 - 4420}{62,01129} \le Z \le \frac{4588,5 - 4420}{62,01129}\right) =$
$P\left(-1,52 \le Z \le 2,72\right) = P(Z \le 2,72) - P(Z \le -1,52) = P(Z \le 2,72) - (1 - P(Z \le 1,52)) = 0,9967 + 0,9357 - 1 = 0,9324$

f) $P(X < 4304,5) = P\left(Z \le \frac{4304,5 - 4420}{62,01129}\right) =$
$(Z \le -1,87) = 1 - P\left(Z \le 1,87\right) = 1 - 0,9693 = 0,0307$

g) Si $n = 415$ entonces $E[X] = np = 415 \cdot 0,13 = 53,95$ como tiene que ser un número natural diríamos que aproximadamente 54 personas se recuperarían.

Problema 3 Dada la peligrosidad de este virus se ha creado hospitales para hospitalizar a los contagiados. El número de individuos que se recuperan sigue una distribución normal de media 531 con una desviación típica de 25 individuos. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

a) (0,5 puntos) se recuperen más de 583 individuos.

b) (0,75 puntos) se recuperen entre 557 y 601 individuos.

c) (0,75 puntos) se recuperen entre 491 y 571 individuos.

d) (0,75 puntos) se recuperen entre 465 y 487 individuos.

e) (0,5 puntos) se recuperen menos de 500 individuos.

Solución:

$$N(531, 25)$$

a) $P(X \geq 583) = P\left(Z \geq \frac{583-531}{25}\right) = P(Z \geq 2,08) = 1 - P(Z \leq 2,08) = 1 - 0,9812 = 0,0188$

b) $P(557 \leq X \leq 601) = P\left(\frac{557-531}{25} \leq Z \leq \frac{601-531}{25}\right) = P(1,04 \leq Z \leq 2,8) = P(Z \leq 2,8) - P(Z \leq 1,04) = 0,9974 - 0,8508 = 0,1466$

c) $P(491 \leq X \leq 571) = P\left(\frac{491-531}{25} \leq Z \leq \frac{571-531}{25}\right) = P(-1,6 \leq Z \leq 1,6) = P(Z \leq 1,6) - (1 - P(Z \leq 1,6)) = 2P(Z \leq 1,6) - 1 = 0,8904$

d) $P(465 \leq X \leq 487) = P\left(\frac{465-531}{25} \leq Z \leq \frac{487-531}{25}\right) = P(-2,64 \leq Z \leq -1,76) = P(Z \leq -1,76) - P(Z \leq -2,64) = 1 - P(Z \leq 1,76) - (1 - P(Z \leq 2,64)) = 0,9959 - 0,9608 = 0,0351$

e) $P(X \leq 500) = P\left(Z < \frac{500-531}{25}\right) = P(Z \leq -1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1 - 0,8925 = 0,1075$