

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

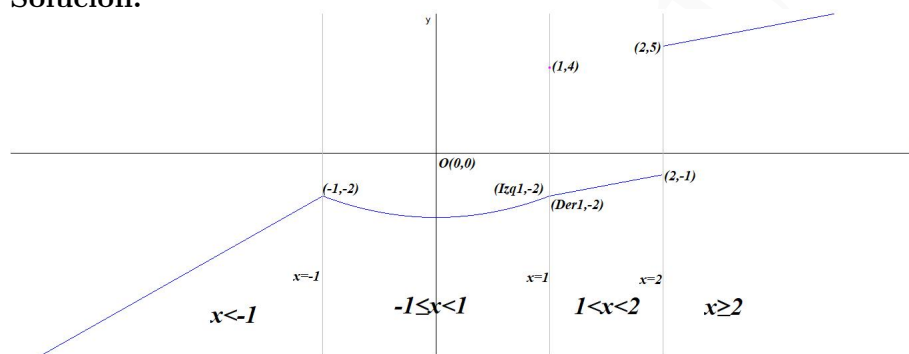
Marzo 2022

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x - 3 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x + 3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua, en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable (agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable (salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 - ax + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 2bx + 1) = a - 2b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 2) = b - a + 2$$

$$a - 2b + 1 = b - a + 2 \implies 2a - 3b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & \text{si } x < 1 \\ 2bx - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a - 2b; \quad f'(1^+) = 2b - a \implies 2a - 2b = 2b - a \implies 3a - 4b = 0$$

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -4 \\ b = -3 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 2a}{2} & \text{si } x < -1 \\ x - 3b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax - b}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2a}{2} = \frac{-1 - 2a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x - 3b) = -1 - 3b \end{cases} \implies \frac{-1 - 2a}{2} = -1 - 3b \implies 2a - 6b = 1$$

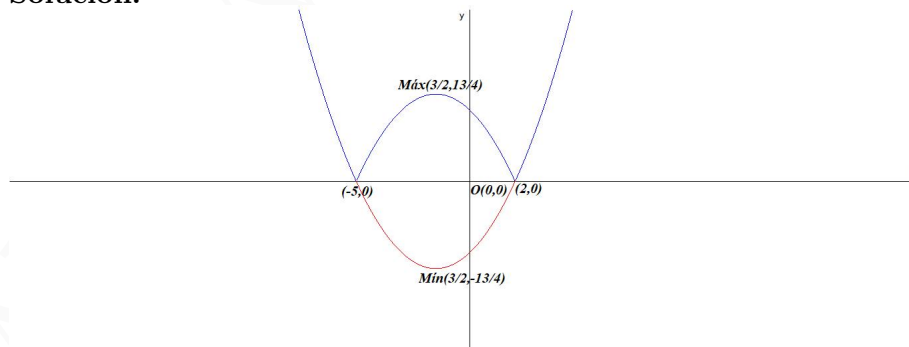
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 3b) = 1 - 3b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2ax - b}{2} = \frac{2a - b}{2} \end{cases} \implies \frac{2a - b}{2} = 1 - 3b \implies 2a + 5b = 2$$

$$\begin{cases} 2a - 6b = 1 \\ 2a + 5b = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 17/22 \\ b = 1/11 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \implies g'(x) = 2x + 3 = 0 \implies x = 3/2$:

x	y
0	-10
-5	0
2	0
3/2	-13/4

$g''(x) = 2 \implies g''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{si } x \leq -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si } -5 < x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

f es continua en $x = -5$:

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -5^+} (-x^2 - 3x + 10) = 0 \\ f(-5) &= 0 \end{aligned}$$

y f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 10) = 0 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -5 \\ -2x - 3 & \text{si } -5 < x \leq 2 \\ 2x + 3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -5$: $f'(-5^-) = -7$ y $f'(-5^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -5$.
Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -7$ y $f'(2^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 3bx + c$, encontrar los valores de a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 4)$.

Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 - 3bx + c \implies f'(x) = 3x^2 + 4ax - 3b$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \implies c = 3 \\ f(2) = 4 \implies 8a - 6b + c + 8 = 4 \\ f'(2) = 0 \implies 8a - 3b + 12 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -17/8 \\ b = -5/3 \\ c = 3 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \frac{17}{4}x^2 + 5x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{17}{2}x + 5$ y $f''(x) = 6x - \frac{17}{2} \implies f''(2) = 12 - \frac{17}{2} = \frac{7}{2} > 0 \implies x = 2$ es un mínimo.

