Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

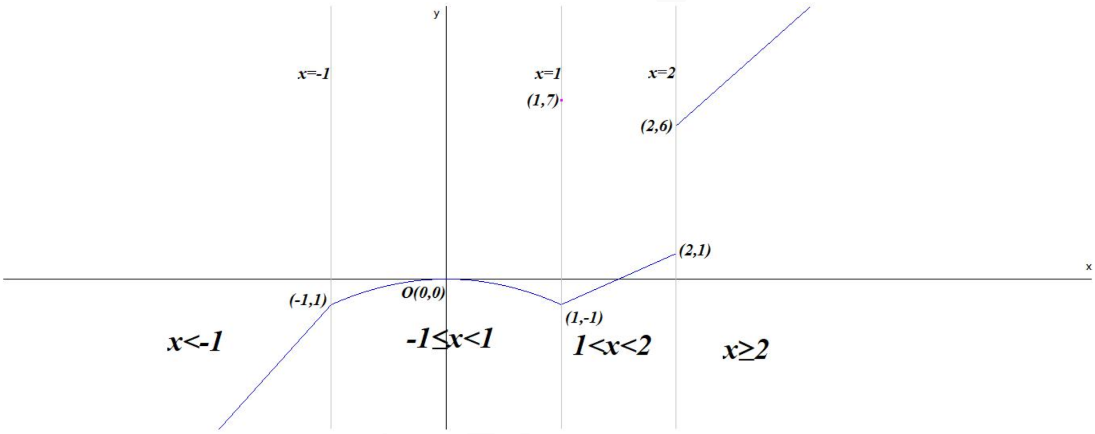
Mayo 2021

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+4 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 7 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 4x-2 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x^2 + bx - a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (3x^2 + bx - a) = 3 + b - a$$

$$2a - b + 1 = 3 + b - a \Longrightarrow 3a - 2b = 2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 6x + b & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b;\ \ f'(1^+) = 6 + b \Longrightarrow 4a - b = 6 + b \Longrightarrow 2a - b = 3$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3a - 2b = 2 \\ 2a - b = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 5 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 8x^2 - 5x + 1 & \text{si} & x < 1 \\ 3x^2 + 5x - 4 & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 16x - 5 & \text{si} & x < 1 \\ 6x + 5 & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{18 - 1}{2} = \frac{17}{2}$$

Si $c < 1:\ \ f'(c) = 16c - 5 = \frac{17}{2} \Longrightarrow c = \frac{27}{32}$ solución válida.

Si $c \geq 1:\ \ f'(c) = 6c + 5 = \frac{17}{2} \Longrightarrow c = \frac{7}{12}$ solución no válida.

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcc} \frac{x-2a}{2} & \text{si} & x < -1 \\ bx + 1 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{ax-b}{3} & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x - 2a}{2} = \dfrac{-1 - 2a}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx + 1) = -b + 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{-1 - 2a}{2} = -b + 1 \Longrightarrow 2a - 2b = -3$$

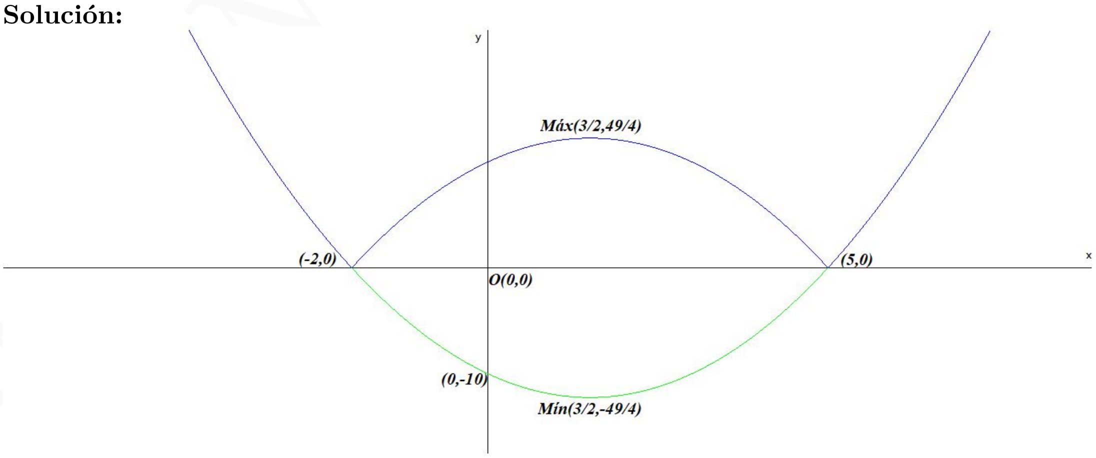
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx + 1) = b + 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax + b}{3} = \dfrac{a + b}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a + b}{3} = b + 1 \Longrightarrow a - 2b = 3$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a - 2b = -3 \\ a - 2b = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -6 \\ b = -9/2 \end{array}\right.$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3/2$:

x	y
0	-10
-2	0
5	0
$3/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 - 3x - 10 & \text{si} & x \leq -2 \\ -(x^2 - 3x - 10) & \text{si} & -2 < x \leq 5 \\ x^2 - 3x - 10 & \text{si} & 5 \leq x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 + 3x + 10) = 0$$

$$f(-2) = 0$$

y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x - 3 & \text{si} & x \leq -2 \\ -2x + 3 & \text{si} & -2 < x \leq 5 \\ 2x - 3 & \text{si} & 5 \leq x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -2$: $f'(-2^-) = -7$ y $f'(-2^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -2$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -7$ y $f'(5^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$.

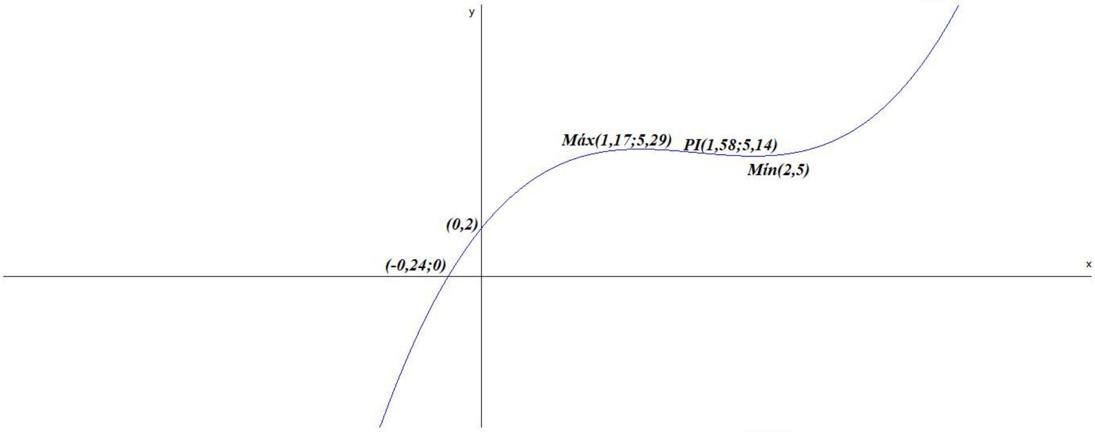
Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 2ax^2 - bx - c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 5)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 - bx - c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4ax - b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow -c = 2 \\ f(2) = 5 \Longrightarrow -8a - 2b - c + 8 = 5 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow -8a - b + 12 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 19/8 \\ b = -7 \\ c = -2 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \frac{19}{4}x^2 + 7x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{19}{2}x + 7$ y $f''(x) = 6x - \frac{19}{2} \Longrightarrow f''(2) = 12 - \frac{19}{2} = \frac{5}{2} > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x + 5x - a & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x+8}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en $\mathbb{R}$.

b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (2e^x + 5x - a) = 2 - a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x+8}{x+2} = 4 \end{cases} \Longrightarrow 2 - a = 4 \Longrightarrow a = -2$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es continua, luego f es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = -2$.

b) Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^x + 5 & \text{si} \quad x < 0 \\ -\dfrac{6}{(x+2)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = 5 \neq f'(0^+) = -3/2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.