

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2020

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 2x = 0 \implies (0, 0)$ con OX .
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.
- | | | |
|-------|----------------|----------------|
| | $(-\infty, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
| signo | - | + |
- $f(-x) = -f(x) \implies$ la función es impar.
- Asíntotas:
 - Verticales:** No hay

- **Horizontales:** $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 3} = 0$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = -\frac{2(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2} = 0 \implies x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

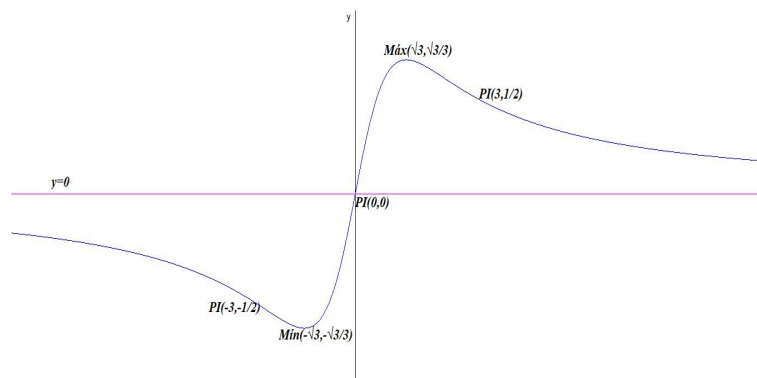
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, creciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ con un mínimo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y un máximo en $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

g) $f''(x) = \frac{4x(x^2 - 9)}{(x^2 + 3)^3} = 0 \implies 4x(x^2 - 9) = 0 \implies x = \pm 3, x = 0$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

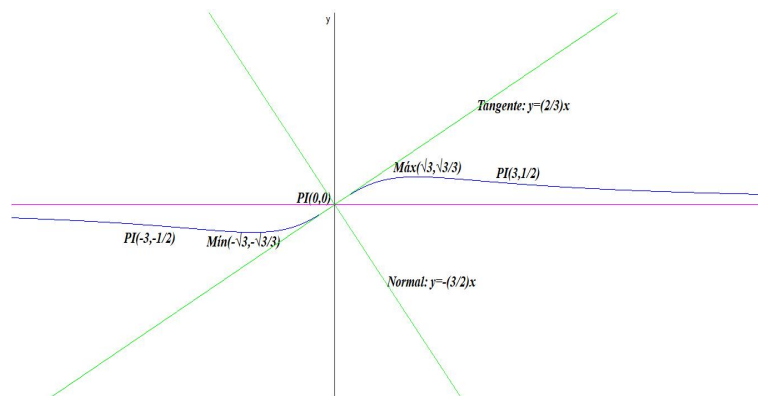
Convexa: $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$, cóncava: $(-3, 0) \cup (3, \infty)$ y con puntos de inflexión en $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:

Como $m = f'(0) = 2/3$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y = \frac{2}{3}x$$

$$\text{Recta Normal : } y = -\frac{3}{2}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0, 0)$.