

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

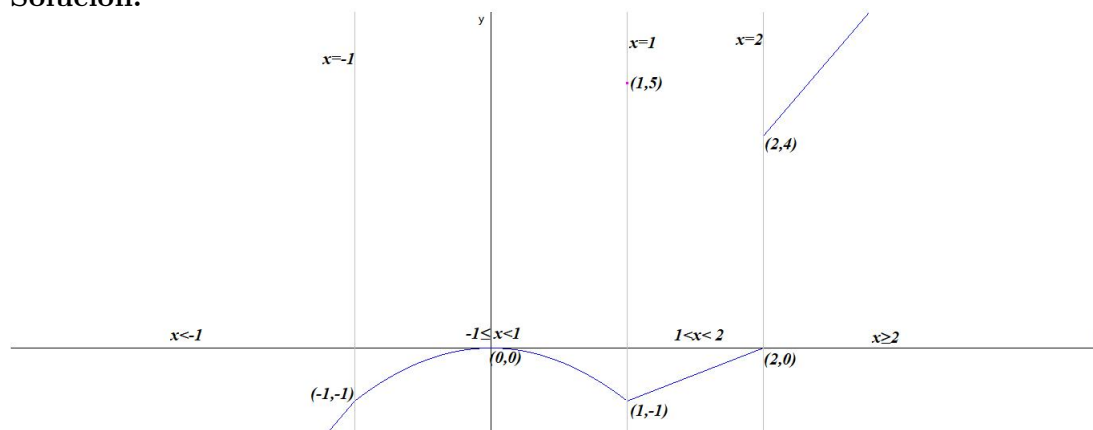
Marzo 2020

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua, en $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable (salto), y en $x = 2$ es discontinua no evitable (salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ 5x^2 + bx - 3a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 3bx + 1) = a - 3b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x^2 + bx - 3a) = 5 + b - 3a$$

$$a - 3b + 1 = 5 + b - 3a \implies a - b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 3b & \text{si } x < 1 \\ 10x + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a - 3b; \quad f'(1^+) = 10 + b \implies 2a - 3b = 10 + b \implies a - 2b = 5$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a - 2b = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{2} & \text{si } x < -1 \\ bx + 2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{ax+2b}{3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-a}{2} = \frac{-1-a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (bx+2) = -b+2 \end{cases} \implies \frac{-1-a}{2} = -b+2 \implies a-2b = -5$$

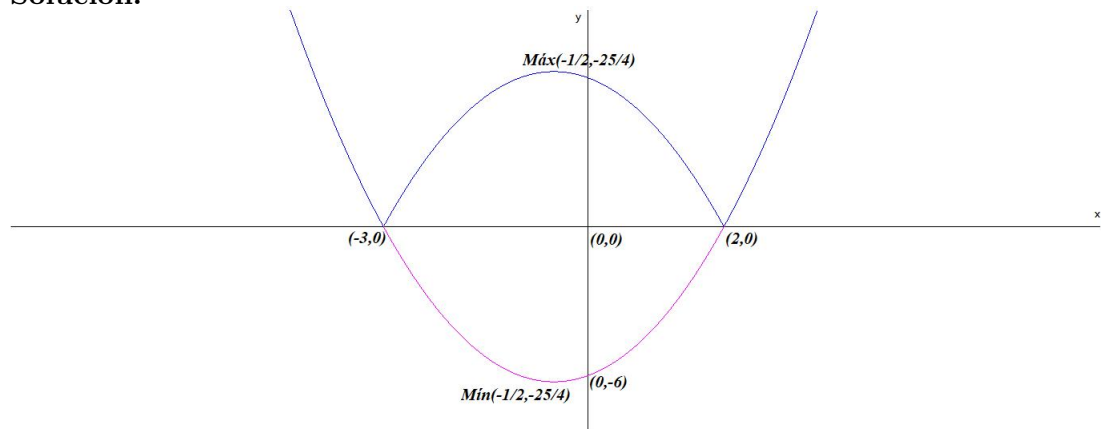
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx+2) = b+2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+2b}{3} = \frac{a+2b}{3} \end{cases} \implies \frac{a+2b}{3} = b+2 \implies a-b = 6$$

$$\begin{cases} a - 2b = -5 \\ a - b = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 17 \\ b = 11 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + x - 6|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + x - 6 \implies g'(x) = 2x + 1 = 0 \implies x = -1/2$:

x	y
0	-6
-3	0
2	0
-1/2	-25/4

$g''(x) = 2 \implies g''(-\frac{1}{2}) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4})$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{si } x \leq -3 \\ -(x^2 + x - 6) & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ x^2 + x - 6 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

f es continua en $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x^2 + x - 6) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (-x^2 - x + 6) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

y f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 - x + 6) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x - 6) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -3 \\ -2x - 1 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -5$ y $f'(-3^+) = 5$, luego no es derivable en $x = -3$.

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -5$ y $f'(2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 4ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 7)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 4ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 3x^2 - 8ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \implies c = 2 \\ f(2) = 7 \implies -16a + 2b - c + 8 = 7 \\ f'(2) = 0 \implies -16a + b + 12 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 21/16 \\ b = 9 \\ c = 2 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \frac{21}{4}x^2 + 9x + 2$
 $f'(x) = 3x^2 - \frac{21}{2}x + 9$ y $f''(x) = 6x - \frac{21}{2} = \frac{3}{2} > 0 \implies x = 2$ es un mínimo.

