

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Febrero 2020

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 4x^2 - 100 = 0 \implies (5, 0), (-5, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 100 \implies (0, 100)$.
-

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 5)$	$(5, +\infty)$
signo	+	-	+	-	+

- $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1} = \left[\frac{-96}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1} = \left[\frac{-96}{0^+} \right] = -\infty$$

$$x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1} = \left[\frac{-96}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1} = \left[\frac{-96}{0^-} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 4$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 100}{x^2 - 1} = 4$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

$$f) f'(x) = \frac{192x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función tiene un mínimo en el punto $(0, 100)$.

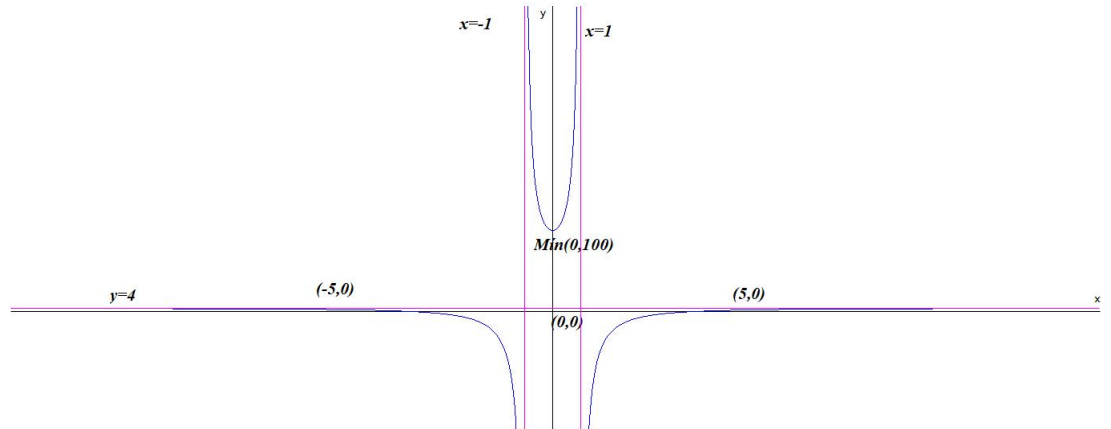
$$g) f''(x) = -\frac{192(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \implies 3x^2 + 1 = 0 \text{ No tiene solución y, por tanto, no hay puntos de inflexión.}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa \cap	cóncava \cup	convexa \cap

Convexa : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$:

Como $m = f'(3) = 9$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 8 = 9(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal : } y + 8 = -\frac{1}{9}(x - 3)$$

Como $f(3) = -8$ las rectas pasan por el punto $(3, -8)$.

