

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CN)
Mayo 2020

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + 5}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies -x = 0 \implies (0, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.
- c)

| | | |
|-------|----------------|----------------|
| | $(-\infty, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
| signo | + | - |

- d) $f(-x) = -f(x) \implies$ la función es IMPAR.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** No tiene, el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 5} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \frac{x^2 - 5}{(x^2 + 5)^2} = 0 \implies x = \pm\sqrt{5}$

| | | | |
|---------|------------------------|-------------------------|-----------------------|
| | $(-\infty, -\sqrt{5})$ | $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ | $(\sqrt{5}, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | + | - | + |
| $f(x)$ | creciente | decreciente | creciente |

La función es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, y creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$, tiene un mínimo en el punto $(\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10}) = (2, 236; -0, 224)$ y un máximo en $(-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}) = (-2, 236; 0, 224)$.

g)

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2 - 15)}{(x^2 + 5)^3} = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{15}$$

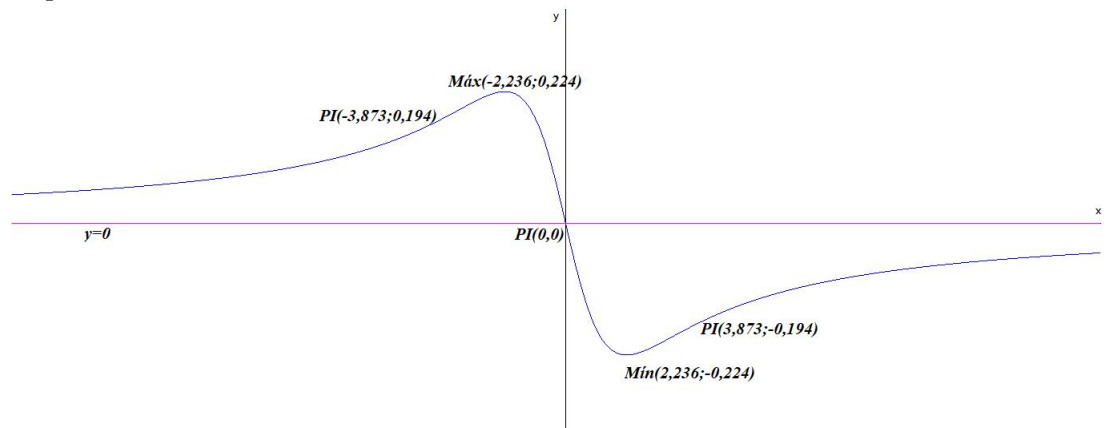
Luego la función si tiene puntos de inflexión.

| | | | | |
|----------|-------------------------|-------------------|------------------|------------------------|
| | $(-\infty, -\sqrt{15})$ | $(-\sqrt{15}, 0)$ | $(0, \sqrt{15})$ | $(\sqrt{15}, +\infty)$ |
| $f''(x)$ | + | - | + | - |
| $f(x)$ | cóncava \cup | convexa \cap | cóncava \cup | convexa \cap |

Cóncava: $(-\infty, -\sqrt{15}) \cup (0, \sqrt{15})$ y Convexa: $(-\sqrt{15}, 0) \cup (\sqrt{15}, \infty)$

Puntos de Inflexión: $(0, 0)$, $(\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{15}}{20}) = (3, 873; -0, 194)$ y $(-\sqrt{15}, \frac{\sqrt{15}}{20}) = (-3, 873; 0, 194)$.

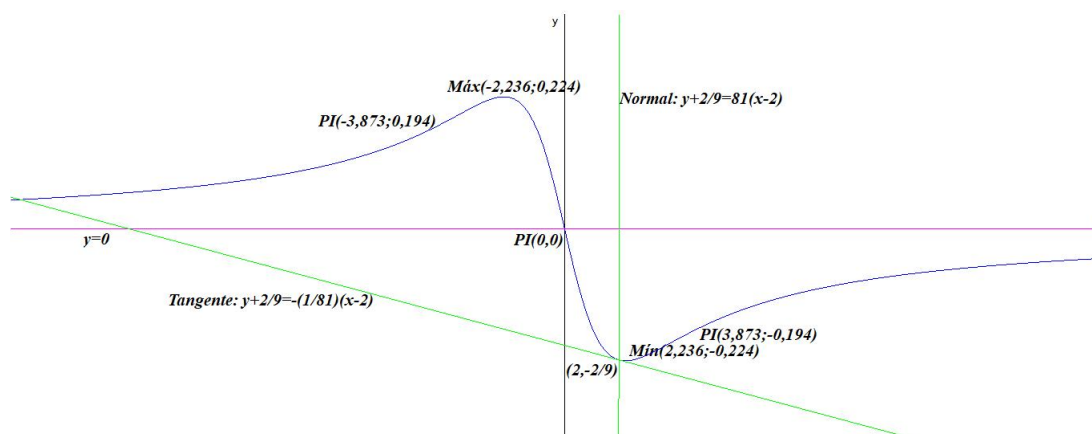
h) Representación:



- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$: Como $m = f'(2) = -1/81$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{2}{9} = -\frac{1}{81}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{2}{9} = 81(x - 2)$$



Como $f(2) = -2/9$ las rectas pasan por el punto $(2, -2/9)$.