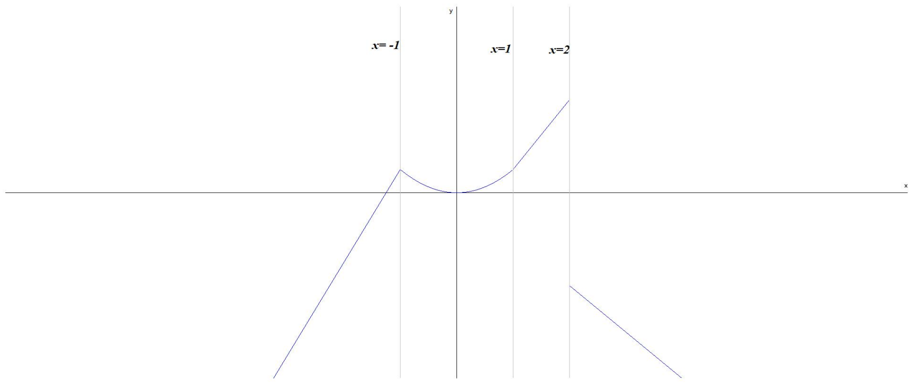
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Marzo 2019

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+5 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 6 & \text{si} \quad x = 1 \\ 3x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ -2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable(salto), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx^2 - ax + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 1) = 3a - 2b + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (2bx^2 - ax + 3) = 2b - a + 3$$

$$3a - 2b + 1 = 2b - a + 3 \Longrightarrow 2a - 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 6a - 2b;\ f'(1^+) = 4b - a \Longrightarrow 6a - 2b = 4b - a \Longrightarrow 7a - 6b = 0$$

$$\begin{cases} 2a - 2b = 1 \\ 7a - 6b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7/2 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-2b}{2} & \text{si} & x < -1 \\ 3bx - 1 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax-b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{ax - 2b}{2} = \dfrac{-a - 2b}{2} \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} (3bx - 1) = -3b - 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-a - 2b}{2} = -3b - 1 \Longrightarrow a - 4b = 2$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (3bx - 1) = 3b - 1 \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax - b}{2} = \dfrac{2a - b}{2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{2a - b}{2} = 3b - 1 \Longrightarrow 2a - 7b = -2$$

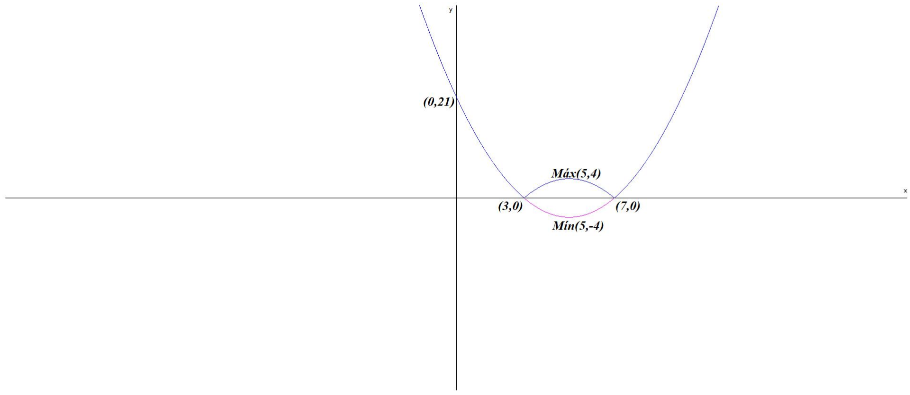
$$\begin{cases} a - 4b = 2 \\ 2a - 7b = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -22 \\ b = -6 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 10x + 21|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 10x + 21 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 5$:

x	y
0	21
3	0
7	0
5	-4



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(5) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(5, -4)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(5, 4)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 - 10x + 21 & \text{si} & x \leq 3 \\ -(x^2 - 10x + 21) & \text{si} & 3 < x \leq 7 \\ x^2 - 10x + 21 & \text{si} & 7 \leq x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^-} (x^2 - 10x + 21) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^+} (-x^2 + 10x - 21) = 0$$

$$f(3) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 10x - 21) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 10x + 21) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x - 10 & \text{si} & x \leq 3 \\ -2x + 10 & \text{si} & 3 < x \leq 7 \\ 2x - 10 & \text{si} & 7 \leq x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -4$ y $f'(3^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 3$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -4$ y $f'(7^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{3, 7\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 5ax^2 + 2bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 9)$. Decidir de que extremo se trata.
Solución:

$$f(x) = x^3 - 5ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 10ax + 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = 9 \Longrightarrow 8 - 20a + 4b + c = 9 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 20a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 6/5 \\ b = 6 \\ c = 1 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ y $f''(x) = 6x - 12 \Longrightarrow f''(2) = 0$ luego en $x = 2$ no hay extremo, se trata de un punto de inflexión.