Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2019

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-3,0)$, $B(0,4)$ y $C(1,5)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{c} -3m+p=-9 \\ 4n+p=-16 \\ m+5n+p=-26 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=33 \\ n=-23 \\ p=108 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2+4x-6y=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=33 \Longrightarrow a=-33/2 \\ n=-2b=-23 \Longrightarrow b=23/2 \\ p=108=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\frac{\sqrt{1186}}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(-\frac{33}{2},\frac{23}{2}\right),\ r=\frac{\sqrt{1186}}{2}$$

Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=25 \Longrightarrow a=5,\quad b^2=9 \Longrightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c=4 \quad e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

Eje Mayor$=2a=10$
Eje Menor$=2b=6$
Distancia Focal$=2c=8$
Excentricidad$=e=\dfrac{4}{5}$
Vértices: $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$, $B(0,-3)$
Focos: $F(4,0)$, $F'(-4,0)$
Ecuación general: $9x^2+25y^2=225$

Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 6 cm y tiene una excentricidad $e=\dfrac{1}{4}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{4}\Longrightarrow a=4c$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow 16c^2=9+c^2\Longrightarrow c=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$a=4c=\frac{4\sqrt{15}}{5}$$

Eje Mayor= $2a=\frac{8\sqrt{15}}{5}$
Eje Menor= $2b=6$
Distancia Focal= $2c=\frac{2\sqrt{15}}{5}$
Excentricidad= $e=\dfrac{1}{4}$
Vértices: $A\left(\dfrac{4\sqrt{15}}{5},0\right)$, $A'\left(-\dfrac{4\sqrt{15}}{5},0\right)$, $B(0,3)$, $B'(0,-3)$
Focos: $F\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5},0\right)$, $F'\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{5},0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{25/6}+\frac{y^2}{4}=1\Longrightarrow \frac{6x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ecuación general: $45x^2+48y^2=432$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(2,1)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas:
$r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+2\lambda \end{cases}$ y sustituimos en la circunferencia:

$$\lambda^2+(2\lambda)^2=49\Longrightarrow 5\lambda^2=49\Longrightarrow \lambda_1=-3,13,\ \ \lambda_2=3,13$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-3,13\Longrightarrow P_1(-1,13;-5,26) \\ \lambda_2=3,13\Longrightarrow P_2\,(5,13;7,26) \end{cases}$$

Problema 5 En una carrera de fórmula uno está a punto de ocurrir una desgracia, el suelo está muy resbaladizo y los corredores corren de una manera impetuosa. Hay una curva demasiado peligrosa, su trazado sigue una trayectoria en la que sus puntos de esa curva están a igual distancia de una recta imaginaria de ecuación $2x - y = 0$ y un punto fijo $F(-1, 0)$. Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x = -1$

d) ¿Estamos en peligro si nuestra posición es el punto $M(-1, 2)$? Podemos suponer que estamos en peligro si nos encontramos a menos de 200 metros.

Nota: Las unidades de los puntos son de escala 1:100, es decir (2,3)=(200,300) metros

Solución:

a) Se trata de una parábola por definición.

b) Sea $P(x, y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P, r)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = \frac{|2x - y|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow (x+1)^2 + y^2 = \frac{(2x - y)^2}{5}$$

$$\Longrightarrow x^2 + 4y^2 + 4xy + 10x + 5 = 0$$

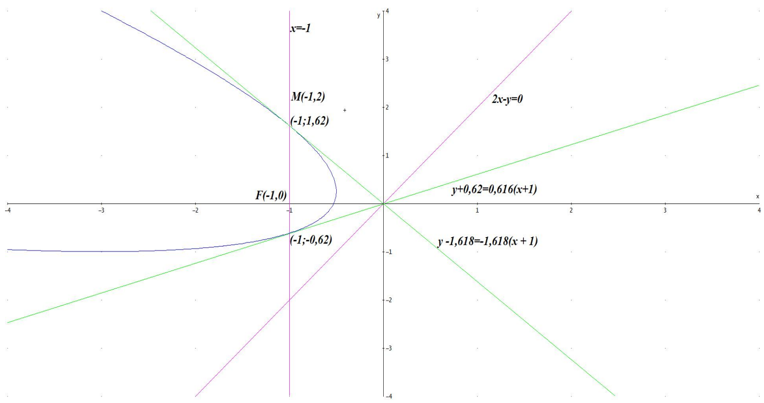
c) En $x = -1 \Longrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 1,62$ e $y = -0,62$:

$$2xdx + 8ydy + 4ydx + 4xdy + 10dx = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 4y + 10}{8y + 4x}$$

En $P\,(-1, 1, 62) \Longrightarrow m = -1,616 = \infty \Longrightarrow y - 1,62 = -1,616(x+1)$
En $P\,(-1, -0, 62) \Longrightarrow m = 0,616 = \infty \Longrightarrow y + 0,62 = 0,616(x+1)$

d) Claramente estaríamos en peligro, sería conveniente buscar otro lugar para ver la carrera.



x=-1
M(-1,2)
(-1;1,62)
2x-y=0
F(-1,0)
y+0,62=0,616(x+1)
(-1;-0,62)
y -1,618=-1,618(x + 1)