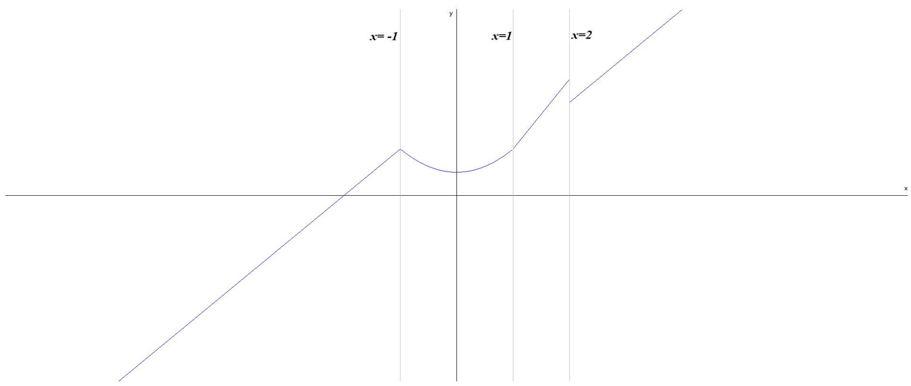
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Mayo 2019

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x+4 & \text{si} & x < -1 \\ x^2+1 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} & x = 1 \\ 3x-1 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 4ax^2 - bx - 1 & \text{si} & x < 1 \\ bx^2 - 3ax + 2 & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right.$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (4ax^2 - bx - 1) = 4a - b - 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (bx^2 - 3ax + 2) = b - 3a + 2$$

$$4a - b - 1 = b - 3a + 2 \Longrightarrow 7a - 2b = 3$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 8ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 3a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 8a - b; \;\; f'(1^+) = 2b - 3a \Longrightarrow 8a - b = 2b - 3a \Longrightarrow 11a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 7a - 2b = 3 \\ 11a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = -33 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -36x^2 + 33x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -33x^2 + 27x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -72x + 33 & \text{si} \quad x < 1 \\ -66x + 27 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

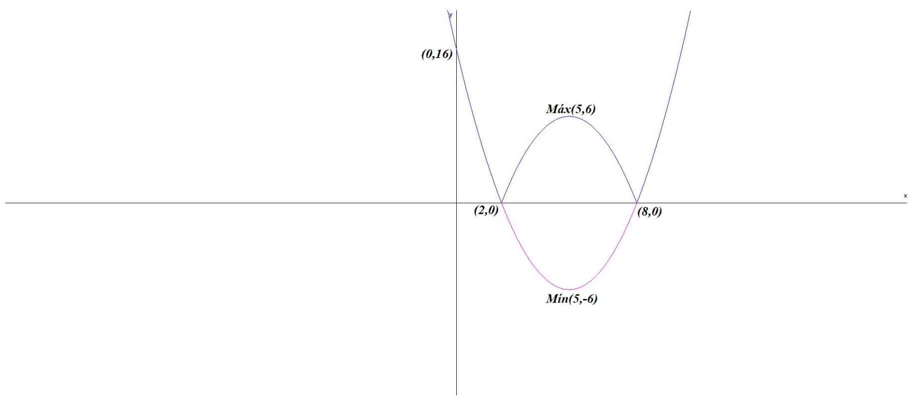
El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0,2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-76 + 1}{2} = -\frac{75}{2}$$

Si $c < 1$: $f'(c) = -72c + 33 = -\frac{75}{2} \Longrightarrow c = \frac{47}{48}$ solución válida.
Si $c \geq 1$: $f'(c) = -66c + 27 = -\frac{75}{2} \Longrightarrow c = \frac{43}{44}$ solución no válida.

Problema 3 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 10x + 16|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 10x + 16 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 5$:



x	y
0	16
2	0
8	0
5	-6

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(5) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(5, -6)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(5, 6)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 10x + 16 & \text{si} & x \le 2 \\ -(x^2 - 10x + 16) & \text{si} & 2 < x \le 8 \\ x^2 - 10x + 16 & \text{si} & 8 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 10x + 16) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 10x - 16) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Y f es continua en $x = 8$

$$\lim_{x \longrightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 8^-} (-x^2 + 10x - 16) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 8^+} (x^2 - 10x + 16) = 0$$

$$f(8) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 10 & \text{si} & x \le 2 \\ -2x + 10 & \text{si} & 2 < x \le 8 \\ 2x - 10 & \text{si} & 8 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -6$ y $f'(2^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 2$.
Derivabilidad en $x = 8$: $f'(8^-) = -6$ y $f'(8^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 8$.

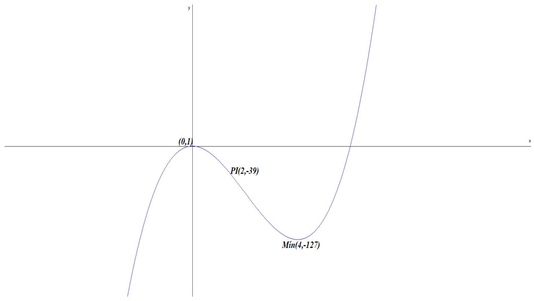
Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{2, 8\}$.

Problema 4 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx - c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 2$. Determinar si el extremo es un máximo o un mínimo.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx - c, \quad f'(x) = 3x^2 - 2ax + b, \quad f''(x) = 6x - 2a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow -c = 1 \\ f'(4) = 0 \Longrightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 2a = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - 12x^2 + 1$$



$$f''(x) = 6x - 12 \Longrightarrow f''(4) = 12 > 0 \Longrightarrow x = 4 \text{ mínimo}$$

Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - 3x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x-6}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en $\mathbb{R}$.
2. Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

Solución:

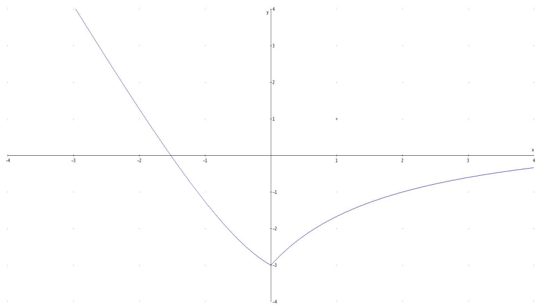
1. Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (2e^x - 3x + a) = 2 + a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x-6}{x+2} = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow 2{+}a = -3 \Longrightarrow a = -5$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en $\mathbb{R}$.

2. Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^x - 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{8}{(x+2)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Problema 6 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-2b}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ bx - 1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax-3b}{2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{ax-2b}{2} = \dfrac{-a-2b}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx-1) = -b-1 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-a-2b}{2} = -b-1 \Longrightarrow a = 2$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx-1) = b-1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax-3b}{2} = \dfrac{2a-3b}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow b-1 = \frac{2a-3b}{2} \Longrightarrow 2a-5b = -2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a = 2 \\ 2a - 5b = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 2 \\ b = 6/5 \end{array} \right.$$