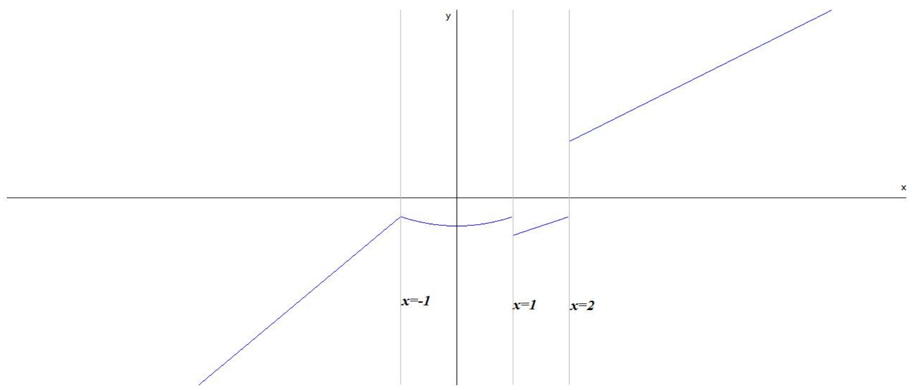
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Marzo 2017

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-3 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 6 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x-6 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable(salto), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3bx^2 - ax + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+}(3bx^2 - ax + 3) = 3b - a + 3$$

$$2a - b + 1 = 3b - a + 3 \Longrightarrow 3a - 4b = 2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 6bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \;\; f'(1^+) = 6b - a \Longrightarrow 4a - b = 6b - a \Longrightarrow 5a - 7b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - 4b = 2 \\ 5a - 7b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 10 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-5b}{2} & \text{si} & x < -1 \\ bx - 1 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax-3b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{ax - 5b}{2} = \dfrac{-a - 5b}{2} \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} (bx - 1) = -b - 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-a-5b}{2} = -b-1 \Longrightarrow a+3b = 2$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (bx - 1) = b - 1 \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax - 3b}{2} = \dfrac{2a - 3b}{2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{2a-3b}{2} = b-1 \Longrightarrow 2a-5b = -2$$

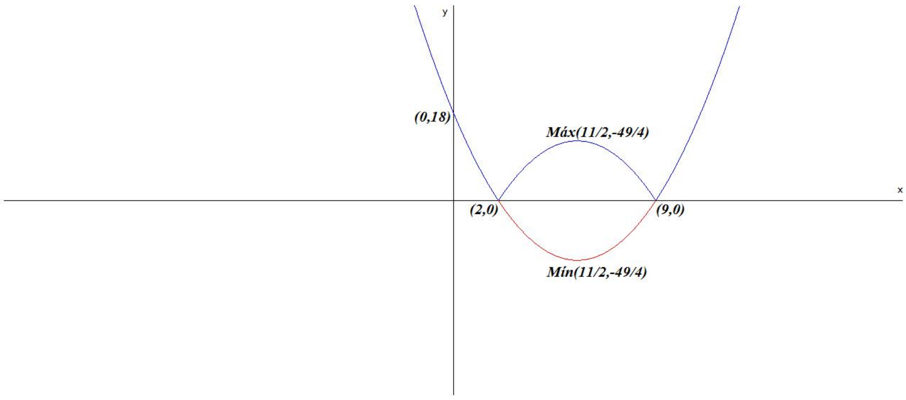
$$\begin{cases} a + 3b = 2 \\ 2a - 5b = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4/11 \\ b = 6/11 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 11x + 18|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 11x + 18 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 11 = 0 \Longrightarrow x = 11/2$:

x	y
0	18
2	0
9	0
11/2	−49/4



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(11/2) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{11}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{11}{2}, \frac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 11x + 18 & \text{si} & x \le 2 \\ -(x^2 - 11x + 18) & \text{si} & 2 < x \le 9 \\ x^2 - 11x + 18 & \text{si} & 9 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 - 11x + 18) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 + 11x - 18) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Y f es continua en $x = 9$

$$\lim_{x \longrightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 9^-} (-x^2 + 11x - 18) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 9^+} (x^2 - 11x + 18) = 0$$

$$f(9) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 11 & \text{si} & x \le 2 \\ -2x + 11 & \text{si} & 2 < x \le 9 \\ 2x - 11 & \text{si} & 9 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -7$ y $f'(2^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 2$.
Derivabilidad en $x = 9$: $f'(9^-) = -7$ y $f'(9^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 9$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{2, 9\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, -1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 7)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -1 \Longrightarrow c = -1 \\ f(2) = 7 \Longrightarrow 8 - 12a + 2b + c = 7 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 12a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 12 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ y $f''(x) = 6x - 12 \Longrightarrow f''(2) = 0$ luego en $x = 2$ no hay extremo, se trata de un punto de inflexión.