Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2018

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-4,0)$, $B(0,6)$ y $C(1,5)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{c} -4m+p=-16 \\ 6n+p=-36 \\ m+5n+p=-26 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=4 \\ n=-6 \\ p=0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2+4x-6y=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=4 \Longrightarrow a=-2 \\ n=-2b=-6 \Longrightarrow b=3 \\ p=0=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\sqrt{13} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=(-2,3)\,,\ \ r=\sqrt{13}$$

Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=64 \Longrightarrow a=8,\ \ b^2=16 \Longrightarrow b=4$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c=4\sqrt{3}\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Eje Mayor$=2a=16$
Eje Menor$=2b=8$
Distancia Focal$=2c=8\sqrt{3}$
Excentricidad$=e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Vértices: $A(8,0)$, $A'(-8,0)$, $B(0,4)$, $B(0,-4)$
Focos: $F\left(4\sqrt{3},0\right)$, $F'\left(-4\sqrt{3},0\right)$
Ecuación general: $x^2+4y^2=64$

Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 4 cm y tiene una excentricidad $e=\dfrac{1}{5}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{5} \Longrightarrow a = 5c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 25c^2 = 4 + c^2 \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$a = 5c = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Eje Mayor$= 2a = \frac{5\sqrt{6}}{3}$
Eje Menor$= 2b = 4$
Distancia Focal$= 2c = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Excentricidad$= e = \dfrac{1}{5}$
Vértices: $A\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{6}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{5\sqrt{6}}{6}, 0\right)$, $B(0,2)$, $B'(0,-2)$
Focos: $F\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$, $F'\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{25/6} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow \frac{6x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ecuación general: $24x^2 + 25y^2 = 100$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(2,-1)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$ y sustituimos en la circunferencia:

$$(\lambda-1)^2 + (4+2\lambda)^2 = 49 \Longrightarrow 5\lambda^2 + 14\lambda - 32 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1,49, \quad \lambda_2 = -4,29$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,49 \Longrightarrow P_1(2,49; 5,98) \\ \lambda_2 = -4,29 \Longrightarrow P_2(-3,29; -5,58) \end{cases}$$

Problema 5 La astronomia es la gran afición de unos amigos que habían estudiado el bachillerato en el colegio Villaeuropa de Móstoles, se habían citado antiguos compañeros de clase, para la exploración de Marte. Ángel, Raquel, María, Arturo, Patricia, Sheila, Laura, Carlos y Marcos llevan unas horas observando el cielo desde Tenerife y Judith, Sara, Andrea, Enrique, Raul, Miguel, Lucía, Javier y Javier hacían cálculos con diversos ordenadores. Para la entrada de una nave en la atmósfera de Marte se dan cuenta que los puntos de esa curva están a igual distancia de una recta imaginaria de ecuación $x - 2y = 0$ y un punto fijo $F(-2, 0)$. Laura advierte a sus compañeros: "Si lanzamos la nave por esa trayectoria, y pasa a menos de 2 unidades astronomicas, la fuerza de la gravedad de Marte será tan grande que hará que la nave se estrelle".

Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x = -1$

d) ¿Se estrellaría la nave sabiendo que Marte tiene de coordenadas $M(-1, 2)$?

Solución:

a) Se trata de una parábola por definición.

b) Sea $P(x, y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P, r)$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow (x+2)^2 + y^2 = \frac{(x-2y)^2}{5}$$

$$\Longrightarrow 4x^2 + y^2 + 4xy + 20x + 20 = 0$$

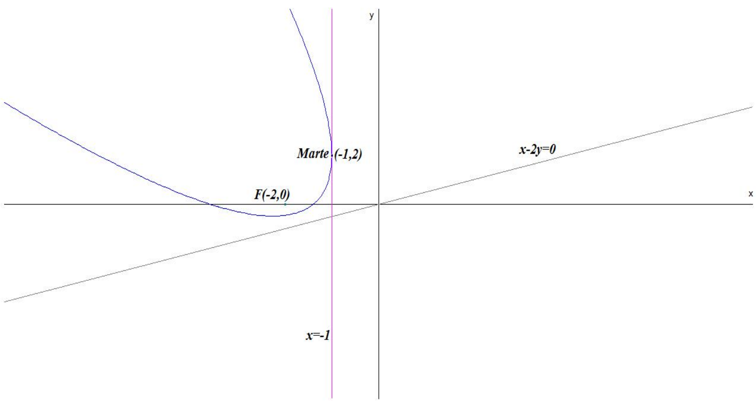
c) En $x = -1 \Longrightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Longrightarrow y = 2 \Longrightarrow (-1, 2)$:

$$8xdx + 2ydy + 4ydx + 4xdy + 20dx = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8x + 4y + 20}{2y + 4x}$$

En $P(-1, 2) \Longrightarrow m = -\frac{20}{0} = \infty \Longrightarrow x = -1$

d) Claramente se estrellaría.



y
Marte (-1,2)
x-2y=0
F(-2,0)
x
x=-1