Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

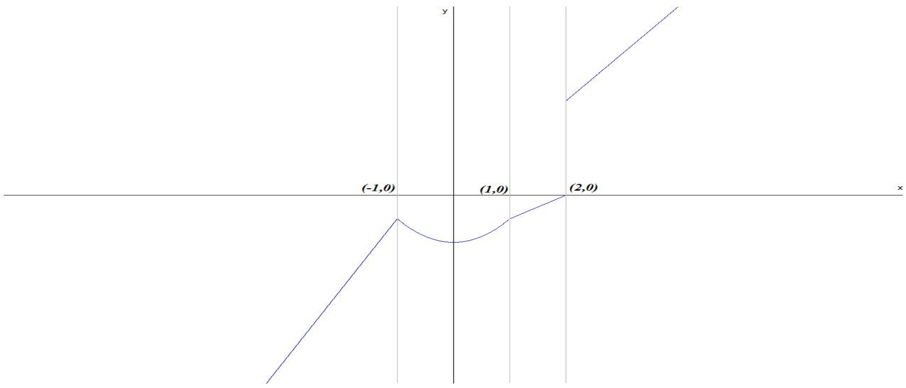
Mayo 2018

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - ax + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 3) = b - a + 3$$

$$2a - b + 1 = b - a + 3 \Longrightarrow 3a - 2b = 2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \;\; f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 4a - b = 2b - a \Longrightarrow 5a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 2 \\ 5a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -10 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -12x^2 + 10x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -10x^2 + 6x + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -24x + 10 & \text{si} \quad x < 1 \\ -20x + 6 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

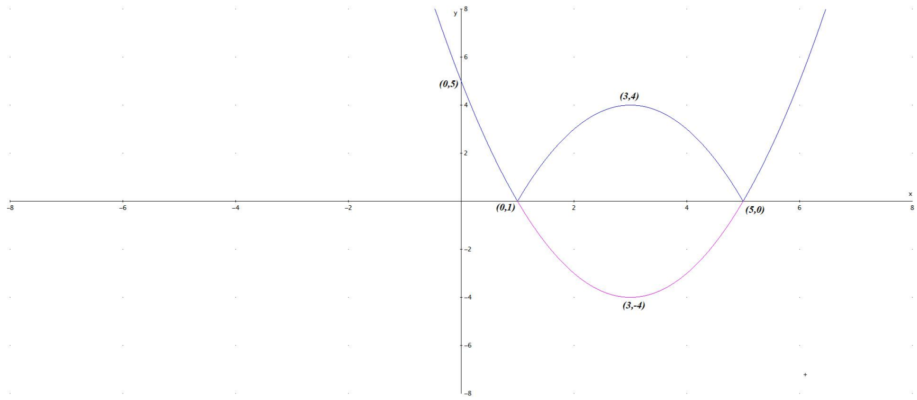
El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-25 - 1}{2} = -\frac{26}{2} = -13$$

Si $c < 1$: $f'(c) = -24c + 10 = -13 \Longrightarrow c = \frac{23}{24}$ solución válida.
Si $c \geq 1$: $f'(c) = -20c + 6 = -13 \Longrightarrow c = \frac{19}{20}$ solución no válida.

Problema 3 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 6x + 5 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$:



x	y
0	5
1	0
5	0
3	4

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(3) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(3, -4)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(3, 4)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 6x + 5 & \text{si} & x \le 1 \\ -(x^2 - 6x + 5) & \text{si} & 1 < x \le 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si} & 5 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 6x - 5) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 6x - 5) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 6 & \text{si} & x \le 1 \\ -2x + 6 & \text{si} & 1 < x \le 7 \\ 2x - 6 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -4$ y $f'(1^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -4$ y $f'(5^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{1, 5\}$.

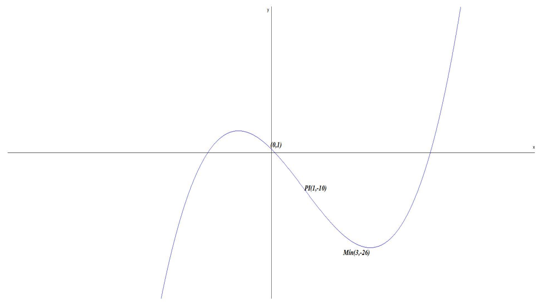
Problema 4 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 3bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en $x = 3$ y un punto de inflexión en $x = 1$. Determinar si el extremo es un máximo o un mínimo.

Solución:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 3bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3b, \quad f''(x) = 6x - 2a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 27 - 6a + 3b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6 - 2a = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow f''(3) = 12 > 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ mínimo}$$



Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3e^x - 2x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x-4}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en R.
2. Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en R.

Solución:

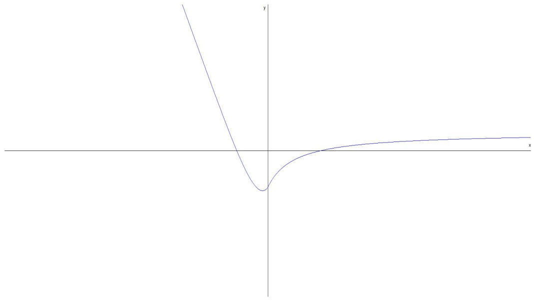
1. Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (3e^x - 2x + a) = 3 + a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x-4}{x+2} = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow 3 + a = -2 \Longrightarrow a = -5$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R.

2. Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3e^x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{6}{(x+2)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = 3/2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.

Problema 6 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{ax-b}{3} & \text{si} & x < -1 \\ bx + 1 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ \frac{2ax-b}{2} & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{ax-b}{3} = \dfrac{-a-b}{3} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx+1) = -b+1 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-a-b}{3} = -b+1 \Longrightarrow a-2b = -3$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx+1) = b+1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax-b}{2} = \dfrac{2a-b}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow b+1 = \frac{2a-b}{2} \Longrightarrow 2a-3b = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - 2b = -3 \\ 2a - 3b = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 13 \\ b = 8 \end{array} \right.$$