

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CN)

Mayo 2018

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 3x^2 = 0 \implies (0, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.
-

| | | | |
|-------|-----------------|-----------|----------------|
| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
| signo | + | - | + |

- $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

| | | |
|---------|----------------|----------------|
| | $(-\infty, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | + | - |
| $f(x)$ | creciente | decreciente |

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 0)$.

g)

$$f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} \neq 0$$

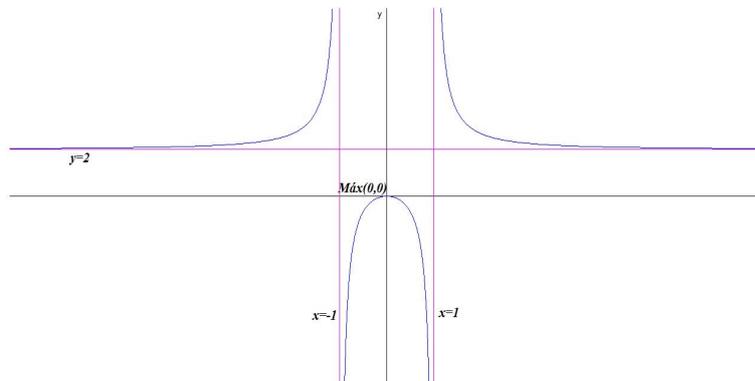
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

| | | | |
|----------|-----------------|-----------|----------------|
| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
| $f''(x)$ | + | - | + |
| $f(x)$ | cóncava | convexa | cóncava |

Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

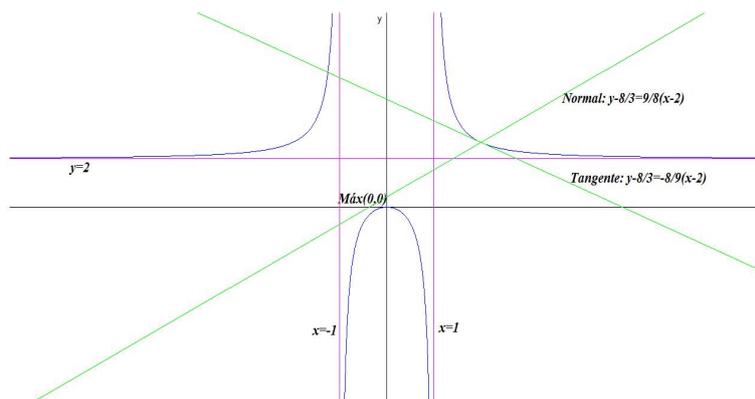
Convexa: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $m = f'(1) = -8/9$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{8}{3} = -\frac{8}{9}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{8}{3} = \frac{9}{8}(x - 2)$$

Como $f(2) = 8/3$ las rectas pasan por el punto $(2, 8/3)$.