Examen de Estadística

Mayo 2017

Problema 1 La Humanidad ha sido invadida por un extraño virus que cambia el carácter de las personas y hace qu éstas se comporten con una agresividad extrema. Se calcula que el 20 % de la población está contagiada. En una calle coinciden 5 individuos. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

1. (0,5 puntos) Ninguno está contagiado.
2. (0,5 puntos) Todos están contagiado.
3. (0,75 puntos) Tres o menos de tres están contagiados.
4. (0,75 puntos) Mas de dos están contagiados.
5. (0,75 puntos) Dos o mas de dos y menos de cuatro están contagiados.

Solución:

$$B(5;0,2)$$

1. $P(X=0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,32768$
2. $P(X=5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,00032$
3. $P(X \leq 3) = 1-(P(X=4)+P(X=5)) = 1-\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 \right) = 0,99328$
4. $P(X > 2) = 1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)) =$ $1-\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 \right) = 0,05792$
5. $P(2 \leq X < 4) = P(X=2)+P(X=3) = 1-\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 \right) = 0,256$

Problema 2 Siguiendo con el enunciado del problema anterior, resulta que en una plaza pública se agrupan una multitud de 1000 personas. Se plantean las siguientes preguntas:

1. (0,5 puntos) ¿Qué distribución se ajustaría a la situación planteada? ¿Qué tipo de distribución utilizaríamos para el tratamiento de datos? Calcular sus parámetros.

2. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya más de 180 afectados.

3. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya entre 170 y 225 afectados.

4. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya entre 160 y 190 afectados.

5. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya entre 210 y 230 afectados.

6. (0,5 puntos) Probabilidad de que haya menos de 180 afectados.

7. (0,5 puntos) Si se congregasen 1243 personas ¿cuántos esperamos que estén afectados?

Solución

1.

$$p = 0,20, \;\; q = 1 - p = 0,80, \;\; n = 1000 \Longrightarrow B(1000; 0,20)$$

Como $np > 5$ y $nq > 5$:

$$\mu = np = 1000 \cdot 0,20 = 200, \;\; \sigma = \sqrt{npq} = 12,65 \Longrightarrow$$

$$N(200; 12,65)$$

2. $P(X > 180,5) = P\left(Z > \frac{180,5-200}{12,65}\right) = 1 - P(Z < -1,54) = P(Z < 1,54) = 0,9382$

3. $P(170,5 < X < 224,5) = P\left(\frac{170,5-200}{12,65} < Z < \frac{224,5-200}{12,65}\right) = P(-2,33 < Z < 1,94) = P(Z < 1,94) - P(Z < -2,33) = P(Z < 1,94) - (1 - P(Z < 2,33)) = 0,9639$

4. $P(160,5 < X < 189,5) = P\left(\frac{160,5-200}{12,65} < Z < \frac{189,5-200}{12,65}\right) = P(-3,12 < Z < -0,83) = P(Z < -0,83) - P(Z < -3,12) = 1 - P(Z < 0,83) - (1 - P(Z < 3,12)) = 0,2024$

5. $P(210,5 < X < 229,5) = P\left(\frac{210,5-200}{12,65} < Z < \frac{229,5-200}{12,65}\right) = P(0,83 < Z < 2,33) = P(Z < 2,33) - P(Z < 0,83) = 0,1934$

6. $P(X < 179,5) = P\left(Z < \frac{179,5-200}{12,65}\right) = (Z < -1,62) = 1 - P(Z < 1,62) = 0,0526$

7. Si $n = 1243$ entonces $E[X] = np = 1243 \cdot 0,20 = 248,6$ como tiene que ser un número natural diríamos 249 personas.

Problema 3 Los afectados se aproximan a la única farmacia que les proporciona la cura para su enfermedad. El tiempo de espera se puede aproximar por una distribución normal de media $\mu = 8$ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos. Se pide calcular la probabilidad de que un enfermo:

1. (0,5 puntos) espere más de 9 minutos.

2. (0,75 puntos) espere entre 6 y 10 minutos.

3. (0,75 puntos) espere entre 9 y 12 minutos.

4. (0,75 puntos) espere entre 5 y 7 minutos.

5. (0,5 puntos) espere menos de 6 minutos.

Solución:

$$N(8,3)$$

1. $P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-8}{3}\right) = P(Z > 0,33) = 1 - P(Z < 0,33) = 0,3707$

2. $P(6 < X < 10) = P\left(\frac{6-8}{3} < Z < \frac{10-8}{3}\right) = P(-0,67 < Z < 0,67) = P(Z < 0,67) - P(Z < -0,67) = P(Z < 0,67) - (1 - P(Z < 0,67)) = 0,4972$

3. $P(9 < X < 12) = P\left(\frac{9-8}{3} < Z < \frac{12-8}{3}\right) = P(0,33 < Z < 1,33) = P(Z < 1,33) - P(Z < 0,33) = 0,2789$

4. $P(5 < X < 7) = P\left(\frac{5-8}{3} < Z < \frac{7-8}{3}\right) = P(-1 < Z < -0,33) = P(Z < -0,33) - P(Z < -1) = 1 - P(Z < 0,33) - (1 - P(Z < 1)) = 0,212$

5. $P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6-8}{3}\right) = P(Z < -0,67) = 1 - P(Z < 0,67) = 0,2514$