Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Junio 2017

Problema 1 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 0$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} = \left[\frac{16}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} = \left[\frac{16}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 16}{x^2 + 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} - x\right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-12}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = -6$ y $x = 2$:

	$(-\infty,-6)$	$(-6,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-6,-2)\cup(-2,2)$.

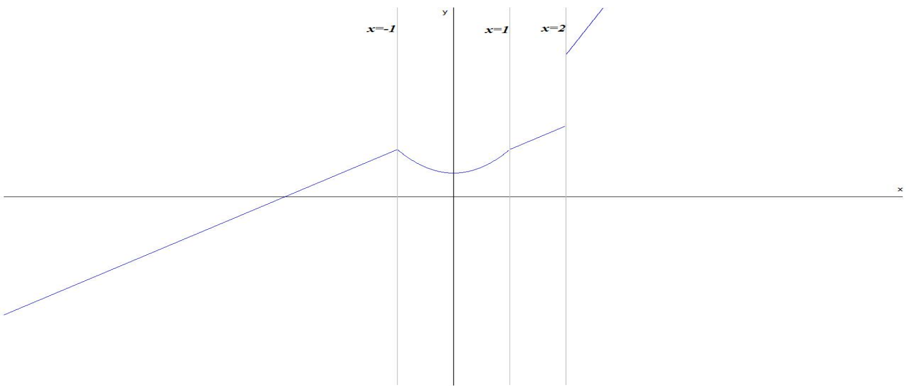
La función tiene un máximo en el punto $(-6,-15)$ y un mínimo en $(2,1)$.

c) $b = f(a) = f(0) = 8$, $m = f'(a) = f'(0) = -3$, luego la recta tangente a la función es: $y - 8 = -3x$

Problema 2 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 7 & \text{si} \quad x = 1 \\ x+1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evible(salto).

Problema 3 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2-8x+15|$ y representarla gráficamente.

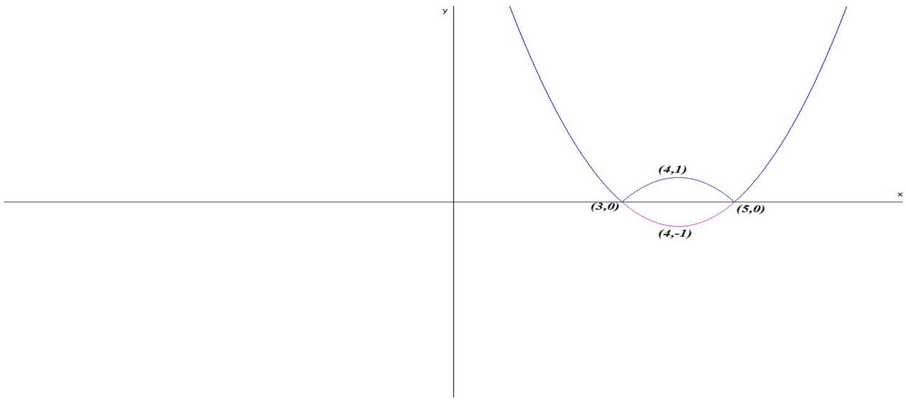
Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 8x + 15 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4$:

x	y
0	15
3	0
5	0
4	-1

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(4) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(4, -1)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto:

$$(4, -1)$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 15 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -(x^2 - 8x + 15) & \text{si} \quad 3 < x \leq 5 \\ x^2 - 8x + 15 & \text{si} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 8x + 15) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (-x^2 + 8x - 15) = 0$$

$$f(3) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 8x - 15) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 5^+} (x^2 - 8x + 15) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x-8 & \text{si} & x \le 3 \\ -2x+8 & \text{si} & 3 < x \le 5 \\ 2x-8 & \text{si} & 5 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -2$ y $f'(3^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 3$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -2$ y $f'(5^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{3, 5\}$.

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = 2ax^2 + 5bx - 2c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(1, -2)$
Solución:

$$f(x) = 2ax^2 + 5bx - 2c \Longrightarrow f'(x) = 4ax + 5b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow -2c = 2 \Longrightarrow c = -1 \\ f(1) = -2 \Longrightarrow 2a + 5b - 2c = -2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 4a + 5b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -8/5 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = 2x^2 - \dfrac{8}{5}x + 2$