Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Mayo 2017

Problema 1 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{x + 5}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = -5$

$$\lim_{x \longrightarrow -5} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \left[\frac{25}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x + 5} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 5}{x + 5} - x\right) = -4$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x - 4$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2+10x}{(x+5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -10$:

	$(-\infty,-10)$	$(-10,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-10)\cup(0,+\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-10,-5)\cup(-5,0)$.

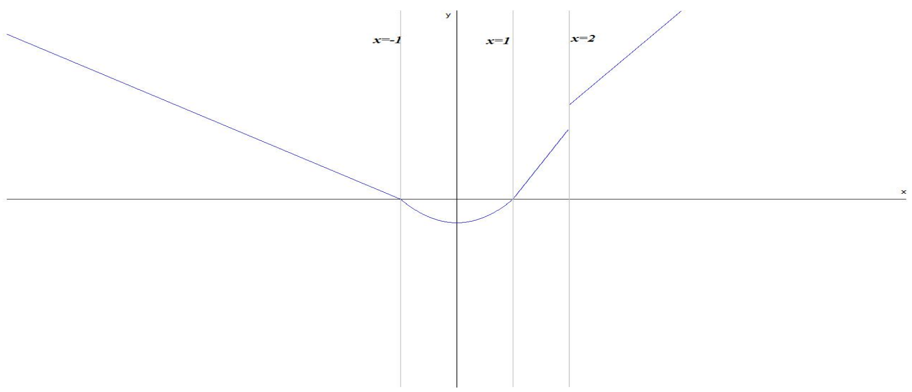
La función tiene un máximo en el punto $(-10,-19)$ y un mínimo en $(0,1)$.

c) $b = f(a) = f(1) = 7/6$, $m = f'(a) = f'(1) = 11/36$, luego la recta tangente a la función es: $y - 7/6 = 11/36(x-1)$

Problema 2 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ 3x-3 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x=-1$, $x=1$ y en $x=2$. Representarla gráficamente.
Solución:

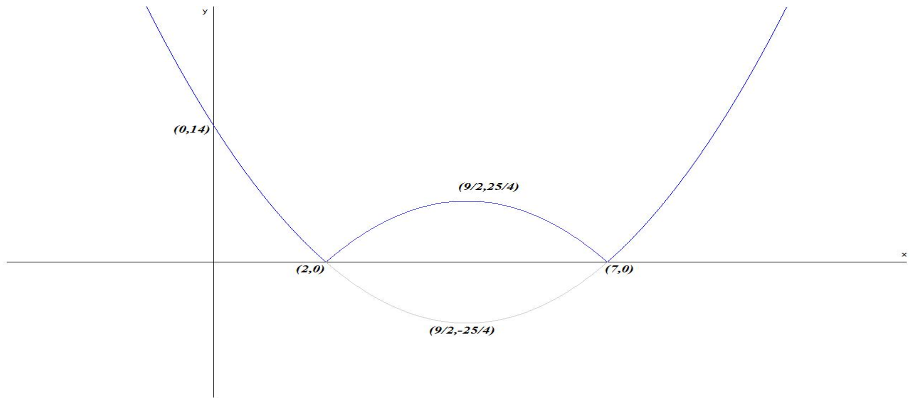


En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evible(salto).

Problema 3 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2-9x+14|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 9x + 14 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 9 = 0 \Longrightarrow x = 9/2$:



x	y
0	14
2	0
7	0
$9/2$	$-25/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{9}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{9}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto:

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcc} x^2 - 9x + 14 & \text{si} & x \le 2 \\ -(x^2 - 9x + 14) & \text{si} & 2 < x \le 7 \\ x^2 - 9x + 14 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (x^2 - 9x + 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (-x^2 + 9x - 14) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 9x - 14) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 7^+}(x^2 - 9x + 14) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 2x - 9 & \text{si} & x \leq 2 \\ -2x + 9 & \text{si} & 2 < x \leq 7 \\ 2x - 9 & \text{si} & 7 \leq x \end{array}\right.$$

Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -5$ y $f'(2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 2$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -5$ y $f'(7^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{2, 7\}$.

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = 5ax^2 - 2bx + 2c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, -2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 1)$
Solución:

$$f(x) = 5ax^2 - 2bx + 2c \Longrightarrow f'(x) = 10ax - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -2 \Longrightarrow 2c = -2 \Longrightarrow c = -1 \\ f(3) = 1 \Longrightarrow 45a - 6b + 2c = 1 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 30a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/15 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 2$