Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Mayo 2017

Problema 1 *(4 puntos)*Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x - 2}$$

se pide:

a) Calcular sus asíntotas

b) Estudiar su monotonía y extremos relativos.

c) Calcular la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

a)
- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2 + x + 3}{x - 2} - x\right) = 3$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 3$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x=-1$ y $x=5$:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,5)$	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1,2)\cup(2,5)$.

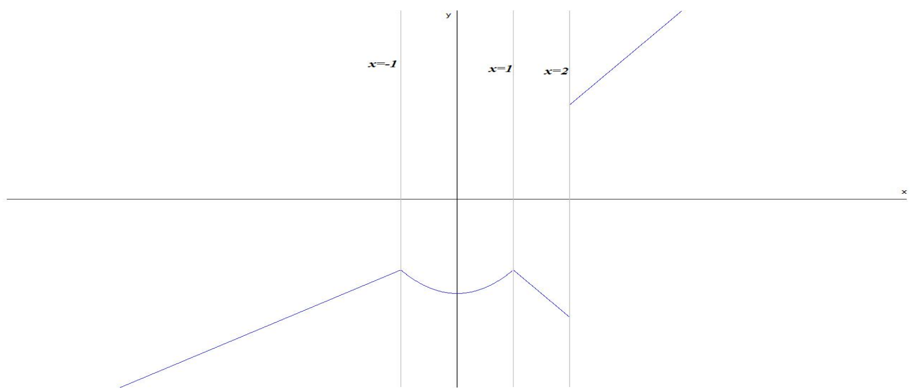
La función tiene un máximo en el punto $(-1,-1)$ y un mínimo en $(5,11)$.

c) $b=f(a)=f(1)=-5$, $m=f'(a)=f'(1)=-8$, luego la recta tangente a la función es: $y+5=-8(x-1)$

Problema 2 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x-2 & \text{si} & x<-1\\ x^2-4 & \text{si} & -1\le x<1\\ 5 & \text{si} & x=1\\ -2x-1 & \text{si} & 1<x<2\\ 2x & \text{si} & 2\le x \end{array}\right.$$

en los puntos $x=-1$, $x=1$ y en $x=2$. Representarla gráficamente.
Solución:

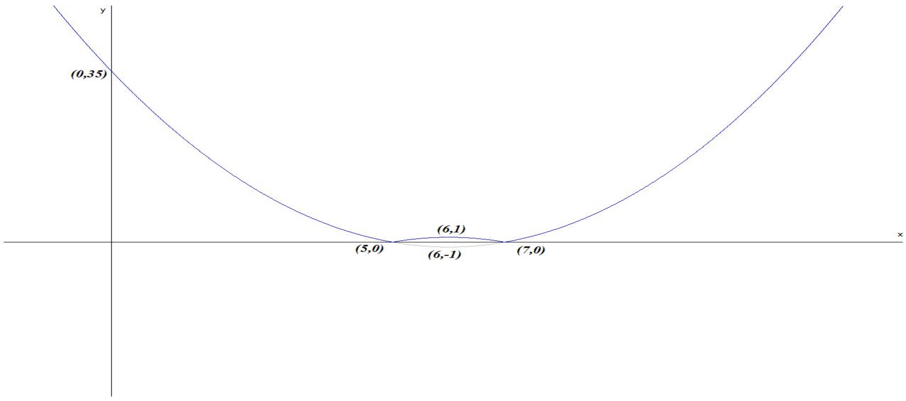


En $x=-1$ es continua , en $x=1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x=2$ es discontinua no evible(salto).

Problema 3 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x^2-12x+35|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 12x + 35 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 6$:



x	y
0	35
5	0
7	0
6	-1

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(6) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(6, -1)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(6, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12x + 35 & \text{si} \quad x \le 5 \\ -(x^2 - 12x + 35) & \text{si} \quad 5 < x \le 7 \\ x^2 - 12x + 35 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (x^2 - 12x + 35) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (-x^2 + 12x - 35) = 0$$

$$f(5) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 12x - 35) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 12x + 35) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 12 & \text{si} \quad x \le 5 \\ -2x + 12 & \text{si} \quad 5 < x \le 7 \\ 2x - 12 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -2$ y $f'(5^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 5$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -2$ y $f'(7^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{5, 7\}$.

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = 3ax^2 - bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, -1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 2)$
Solución:

$$f(x) = 3ax^2 - bx + c \Longrightarrow f'(x) = 6ax - b$$

$$\begin{cases} f(0) = -1 \Longrightarrow 3c = 3 \Longrightarrow c = -1 \\ f(2) = 2 \Longrightarrow 12a - 2b + c = 2 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 1$