Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2017

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $5x - y - 2 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 5) \\ A(0, -2) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (0, -2) + \lambda(1, 5)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{5}$
- General: $5x - y - 2 = 0$
- Explícita: $y = 5x - 2$
- Punto pendiente: $y + 2 = 5x$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = -3 \Longrightarrow \alpha = 78^{o}41'24''$

Problema 2 (5 puntos) Si los puntos $A(-2, -2)$, $B(6, -1)$ y $C(2, 5)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular

a) (1,5 puntos) el circuncentro.

b) (2 puntos) sus ángulos y decidir que tipo de triángulo es.

c) (1,5 puntos) calcular la longitud de la altura sobre el lado AB y la ecuación de la recta que la define.

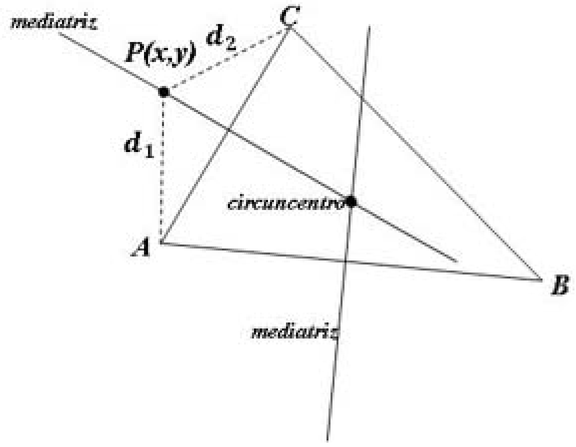
Solución:

a)
- Mediatriz entre A y B:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} \Longrightarrow 16x + 2y - 29 = 0$$

- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} \Longrightarrow 8x + 14y - 21 = 0$$



- Circuncentro:

$$\left\{\begin{array}{l} 16x+2y-29=0 \\ 8x+14y-21=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$$

b) $|\overrightarrow{AB}|=|(8,1)|=\sqrt{65}$, $|\overrightarrow{AC}|=|(4,7)|=\sqrt{65}$:

$$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{32+7}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{65}}\Longrightarrow \hat{A}=53^{\text{o}}7'48''$$

$|\overrightarrow{BA}|=|(-8,-1)|=\sqrt{65}$, $|\overrightarrow{BC}|=|(-4,6)|=2\sqrt{13}$:

$$\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{32-6}{\sqrt{65}\cdot 2\cdot\sqrt{13}}\Longrightarrow \hat{A}=63^{\text{o}}26'6''$$

$|\overrightarrow{CA}|=|(-4,-7)|=\sqrt{65}$, $|\overrightarrow{CB}|=|(4,-6)|=2\sqrt{13}$:

$$\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-16+42}{\sqrt{65}\cdot 2\cdot\sqrt{13}}\Longrightarrow \hat{A}=63^{\text{o}}26'6''$$

Se trata de un triángulo isósceles.

c) $\overrightarrow{AB}=(8,1)\perp\overrightarrow{u}=(1,-8)$:
La recta que une A y B: $x-8y+\lambda=0$ como tiene que pasar por $A(-2,-2)\Longrightarrow -2+16\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-14\Longrightarrow t: x-8y-14=0$

$$\text{Altura}=d(C,t)=\frac{|2-40-14|}{\sqrt{65}}=\frac{52\sqrt{65}}{65}\ u$$

La recta que define esta altura tiene de ecuación $h_1: 8x+y+\lambda=0$ y, como pasa por $C(2,5)$, tenemos $16+5+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-21\Longrightarrow$ $h_1: 8x+y-21=0$

Problema 3 (3 puntos) Sea el punto $A(2,9)$ y la recta $r: x - 5y + 2 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

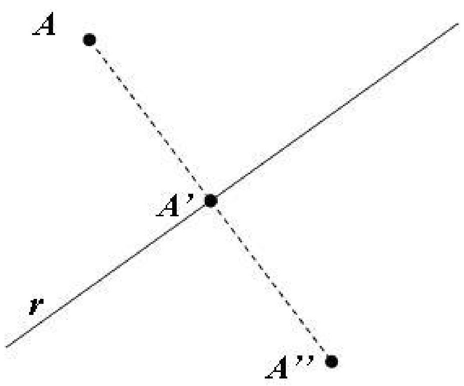
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s: 5x - y + 1 = 0$.

Solución:

a) $x - 5y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 2 - 45 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 43$. La recta buscada es $h: x - 5y + 43 = 0$

b) $5x + y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 10 + 9 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -19$. La recta buscada es $t: 5x + y - 19 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\left\{ \begin{array}{l} r: x - 5y + 2 = 0 \\ t: 5x + y - 19 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow A'\left(\frac{93}{26}, \frac{29}{26}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(\frac{93}{26}, \frac{29}{26}\right) - (2,9) = \left(\frac{67}{13}, -\frac{88}{13}\right)$$

d)

$$d(P,r) = d(P,s) \Longrightarrow \frac{|x-5y+2|}{\sqrt{26}} = \frac{|5x-y+1|}{\sqrt{26}} \Longrightarrow |x{-}5y{+}2| = |5x{-}y{+}1|$$

- $x - 5y + 2 = 5x - y + 1 \Longrightarrow 4x + 4y - 1 = 0$
- $x - 5y + 2 = -5x + y - 1 \Longrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$