Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Mayo 2016

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{7x}{x^2 + 1}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Estudiar su curvatura.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 7x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ IMPAR.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, el denominador no se anula nunca.

- **Horizontales:** $y = 0$ ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{7x}{x^2+1} = 0$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \dfrac{-7x^2+7)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en los intervalos $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, presenta un mínimo en el punto $(-1, -7/2)$ y un máximo en el $(1, 7/2)$.

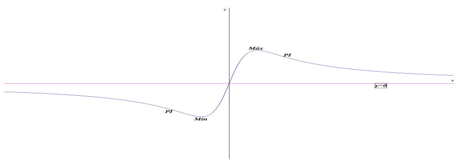
g) $f''(x) = \dfrac{14x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

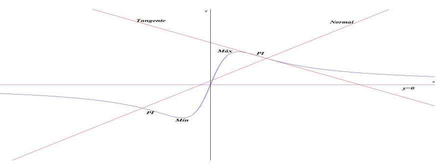
La función es convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ y cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Tiene los puntos de Inflexión: $\left(-\sqrt{3}, -\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(2\sqrt{3}, \frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:



Como $f(2) = 14/5$ las rectas pasan por el punto $(1, 14/5)$.

Como $m = f'(2) = -\frac{21}{25}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - \frac{14}{5} = -\frac{21}{25}(x-2)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{14}{5} = \frac{25}{21}(x-2)$$