Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Junio 2016

Problema 1 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - ax + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 2) = b - a + 2$$

$$2a - b + 1 = b - a + 2 \Longrightarrow 3a - 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \; f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 4a - b = 2b - a \Longrightarrow 5a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 5a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \end{cases}$$

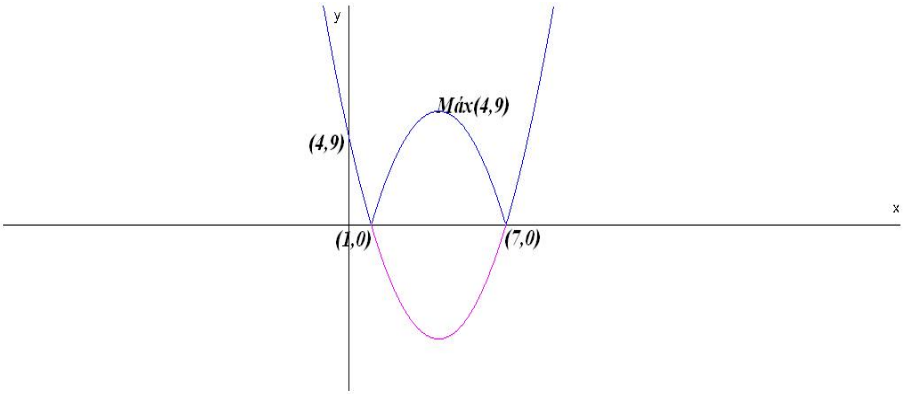
$$f(x) = \begin{cases} -6x^2 + 5x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -5x^2 + 3x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -12x + 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ -10x + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-12 - 1}{2} = -\frac{13}{2}$$

Si $c < 1 : \;\; f'(c) = -12c + 5 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c = \frac{23}{24}$ solución válida. Si $c \geq 1$: $f'(c) = -10c + 3 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c = \frac{19}{20}$ solución no válida.

Problema 2 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ y representarla gráficamente.



Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 8x + 7 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4$:

x	y
0	7
1	0
7	0
4	-9

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(4) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(4, -9)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(4, 9)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -(x^2 - 8x + 7) & \text{si} \quad 1 < x \le 7 \\ x^2 - 8x + 7 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 8x + 7) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 8x - 7) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 8x - 7) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 8x + 7) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-8 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x+8 & \text{si} \quad 1 < x \le 7 \\ 2x-8 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -6$ y $f'(1^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -6$ y $f'(7^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{1, 7\}$.

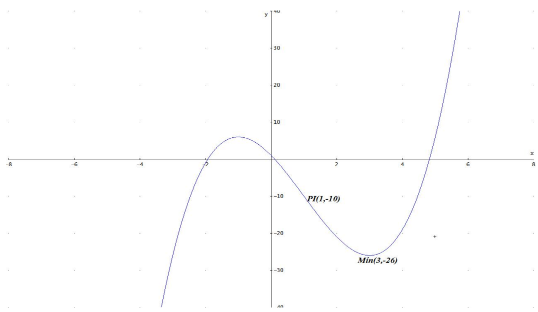
Problema 3 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 3bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en $x = 3$ y un punto de inflexión en $x = 1$. Determinar si el extremo es un máximo o un mínimo.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 - 3bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 4ax - 3b, \quad f''(x) = 6x + 4a$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 27 + 12a - 3b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6 + 4a = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3/2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 9 \Longrightarrow f''(3) = 9 > 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ mínimo}$$



Problema 4 Estudiar la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 3e^x - x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

y dibuja una representación gráfica aproximada.

Solución:

Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(3e^x - x) = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x+3}{x+1} = 3 \\ \\ f(0) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

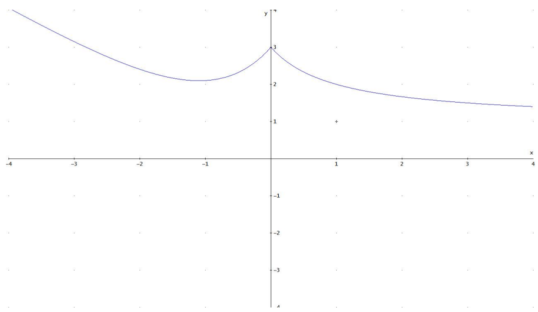
En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3e^x - 1 & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = -2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.



Problema 5 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{2ax-b}{3} & \text{si} & x < -1 \\ 3bx - 2 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{4ax-2b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{2ax - b}{3} = \dfrac{-2a - b}{3} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (3bx - 2) = -3b - 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \dfrac{-2a - b}{3} = -3b - 2 \Longrightarrow a - 4b = 3$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (3bx - 2) = 3b - 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{4ax - 2b}{2} = 2a - b \end{array} \right. \Longrightarrow 3b - 2 = 2a - b \Longrightarrow a - 2b = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 3 \\ a - 2b = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -5 \\ b = -2 \end{array} \right.$$