

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Marzo 2014

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 5}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies$ No tiene solución.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -2/5 \implies (0, -2/5)$.
-

	$(-\infty, 5)$	$(5, +\infty)$
signo	-	+

- $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2}{x - 5} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 + 2}{x - 5} = \left[\frac{27}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 + 2}{x - 5} = \left[\frac{27}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 5} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x - 5} - x \right) = 5$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 5$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 10x - 2}{(x - 5)^2} = 0 \implies x = 5 - 3\sqrt{3} \approx -0,2, 2, \quad x = 5 + 3\sqrt{3} \approx 10, 2$$

	$(-\infty, 5 - 3\sqrt{3})$	$(5 - 3\sqrt{3}, 5 + 3\sqrt{3})$	$(5 + 3\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 5 - 3\sqrt{3}) \cup (5 + 3\sqrt{3}, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(5 - 3\sqrt{3}, 5) \cup (5, 5 + 3\sqrt{3})$.

La función tiene un máximo en el punto $(5 - 3\sqrt{3}, 10 - 6\sqrt{3}) \approx (-0, 2; 0, 4)$ y un mínimo en $(5 + 3\sqrt{3}, 10 - 6\sqrt{3}) \approx (10, 2; 20, 4)$.

g)

$$f''(x) = \frac{54}{(x - 5)^3} \neq 0$$

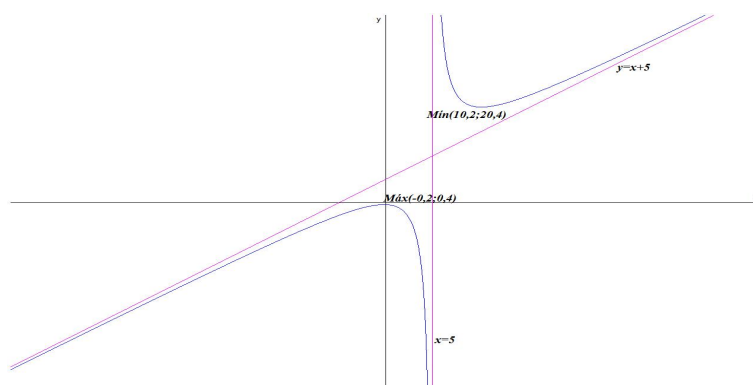
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 5)$	$(5, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

Cóncava: $(5, +\infty)$

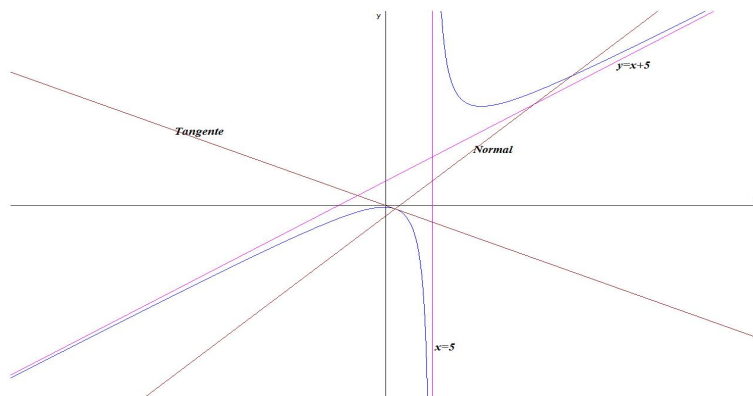
Convexa: $(-\infty, 5)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $m = f'(1) = -11/16$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{3}{4} = -\frac{11}{16}(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{3}{4} = \frac{16}{11}(x - 1)$$

Como $f(1) = -3/4$ las rectas pasan por el punto $(1, -3/4)$.