Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato CN

Enero 2012

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2-x+1}\right)$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{3x^3-2x-1}{x^3-4x+3}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{3x^2+4}-\sqrt{8x}}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^{x^2-1}}{5x+8}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^{x+5}+1}{e^{x+5}-1}$

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin^2 x + x}{x \cos x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2-x+1}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{3x^3-2x-1}{x^3-4x+3} = -7$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{3x^2+4}-\sqrt{8x}}{x-2} = \dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^{x^2-1}}{5x+8} = \infty$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^{x+5}+1}{e^{x+5}-1} = 1$

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin^2 x + x}{x \cos x} = 1$

Solución:

Problema 2 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = (3x^2-1)^{11}$

2. $y = \ln\left(\dfrac{5x-1}{x^2}\right)$

3. $y = x^2 \sec x$
4. $y = \dfrac{\tan x}{x^2 - 1}$
5. $y = \sin(x^2 + 1)^2$
6. $y = (\tan x)^{x^2-1}$

Solución:

1. $y = (3x^2 - 1)^{11} \Longrightarrow y' = 11(3x^2 - 1)^{10}(6x)$
2. $y = \ln\left(\dfrac{5x-1}{x^2}\right) \Longrightarrow y' = \frac{5}{5x-1} - \frac{2x}{x^2}$
3. $y = x^2 \sec x \Longrightarrow y' = 2x \sec x + x^2 \sec x \tan x$
4. $y = \dfrac{\tan x}{x^2 - 1} \Longrightarrow y' = \dfrac{1/\cos^2 x \cdot (x^2 - 1) - 2x \tan x}{(x^2 - 1)^2}$
5. $y = \sin(x^2 + 1)^2 \Longrightarrow y' = 2(2x)(x^2 + 1)\cos(x^2 + 1)^2$
6. $y = (\tan x)^{x^2-1} \Longrightarrow y' = (\tan x)^{x^2-1}\left(2x \ln(\tan x) + (x^2 - 1)\frac{1/\cos^2 x}{\tan x}\right)$

Problema 3 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{3x}$ en el punto $x = 2$.
2. $f(x) = xe^x$ en el punto $x = 0$.

Solución:

1. $b = f(a) \Longrightarrow b = f(2) = \dfrac{1}{2}$ e $y - b = m(x - a)$

$$f'(x) = -\frac{1}{3x^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\frac{1}{2}$$

Recta Tangente: $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$

Recta Normal: $y - \dfrac{1}{2} = 2(x - 2)$

2. $b = f(a) \Longrightarrow b = f(0) = 0$ e $y - b = m(x - a)$

$$f'(x) = e^x + xe^x \Longrightarrow m = f'(0) = 1$$

Recta Tangente: $y = x$

Recta Normal: $y = -x$