Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Mayo 2011

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.
9. Representación gráfica.
10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$
2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x - 3 = 0 \Longrightarrow (3, 0)$.
3.

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR
5. - Asíntotas:

- Verticales: En $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x-3}{(x-1)^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-x+5}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow -x+5 = 0 \Longrightarrow x = 5$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 5)$.

La función tiene un máximo en el punto $(5, 1/8)$.

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

$$f''(x) = \frac{2x-14}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow 2x-14 = 0 \Longrightarrow x = 7$$

	$(-\infty, 7)$	$(7, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, 7)$ y cóncava en el intervalo $(7, \infty)$.

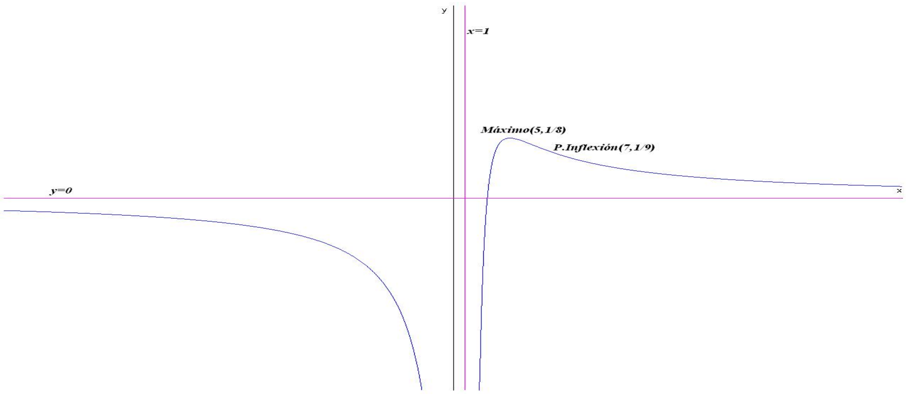
La función tiene un un punto de inflexión en $(7, 1/9)$.

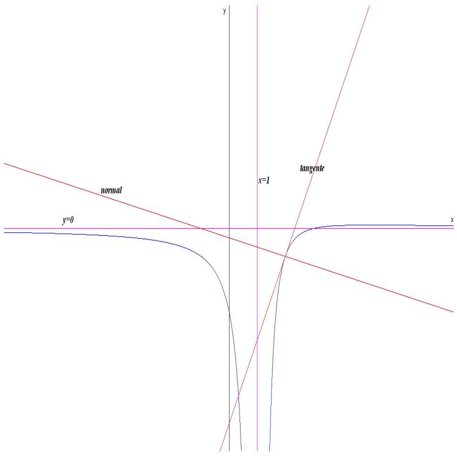
8. En $x = 2 \Longrightarrow f(2) = -1$ y $m = f'(2) = 3$:

Recta tangente: $y + 1 = 3(x - 2)$

Recta normal: $y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x - 2)$

9. Representación gráfica

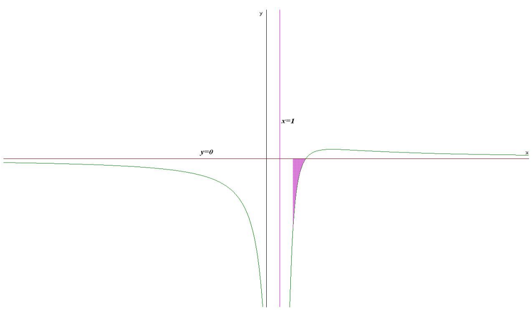




10. Calcular el siguiente área:

$$S = \int_2^3 \frac{x-3}{(x-1)^2}\, dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} \bigg]_2^3 = 1 - \ln 2 = 0,307\ u^2$$



$$\frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} \quad x-3 = A(x-1)+B \\ x = 1 \Longrightarrow B = -2 \\ x = 0 \Longrightarrow -3 = -A + B \Longrightarrow A = 1 \end{cases}$$