Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2011

Problema 1 Dada la curva: $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x^2}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
10. Calcular el área delimitado por la función, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
3.

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
signo	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = 2 \Longrightarrow y = 2$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

6. $f'(x) = \dfrac{1}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay extremos.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$-$	$+$
y	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en: $(-\infty, 0)$

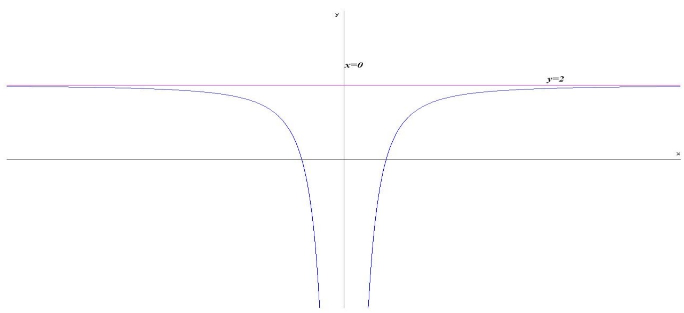
La función es creciente en: $(0, \infty)$

7.

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión y además $f''(x) < 0 \Longrightarrow$ la función es cóncava en todo el dominio de la función en $R - \{0\}$

8. Representación



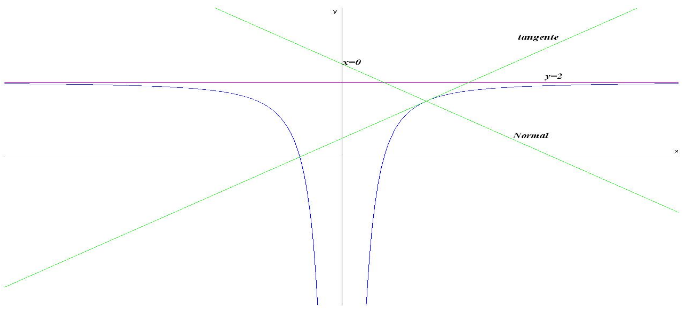
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

Como $f(1) = \dfrac{3}{2}$ las rectas pasan por el punto $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Como $m = f'(1) = 1$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{3}{2} = x - 1 \Longrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{3}{2} = -(x - 1) \Longrightarrow 2x + 2y - 5 = 0$$



10.

$$S_1 = \int_1^2 \frac{4x^2 - 1}{2x^2}\, dx = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^{-2}\right) dx = 2x + \frac{1}{2x}\Big]_1^2 dx = \frac{7}{4}$$

$$S = |S_1| = \frac{7}{4} = 1,75 \; u^2$$