Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2011

Problema 1 Dada la curva: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
10. Calcular el área delimitado por la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$ No hay.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No es ni PAR ni IMPAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2+1}{x-2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{x-2} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{x-2} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-2} - x\right) = 2$$

$$y = x + 2$$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 2 + \sqrt{5} = 4,236; \;\; x = 2 - \sqrt{5} = -0,236$$

	$\left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right)$	$\left(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right)$	$\left(2+\sqrt{5}, +\infty\right)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es creciente en: $\left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right) \cup \left(2+\sqrt{5}, \infty\right)$

La función es decreciente en: $\left(2+\sqrt{5}, 2\right) \cup \left(2, 2+\sqrt{5}\right)$

La función presenta un máximo en el punto $\left(2-\sqrt{5}, 4-2\sqrt{5}\right) = (-0,236; -0,472))$ y un mínimo en el punto $\left(2+\sqrt{5}, 4+2\sqrt{5}\right) = (4,236; 8,472)$.

7.

$$f''(x) = \frac{10}{(x-2)^3} \neq 0$$

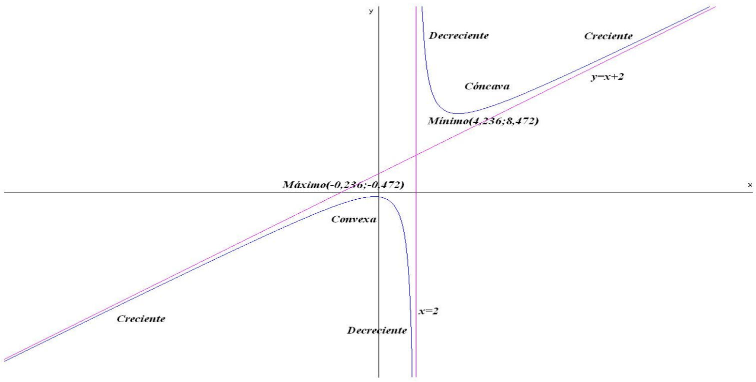
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 2)$

Cóncava: $(2, +\infty)$

8. Representación



9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

Como $f(1) = -2$ las rectas pasan por el punto $(1, -2)$.

Como $m = f'(1) = -4$ tenemos que

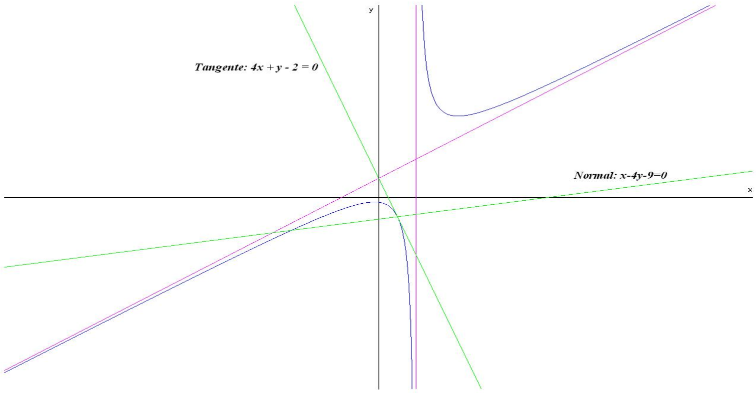
$$\text{Recta Tangente}: \ y + 2 = -4(x - 1)$$

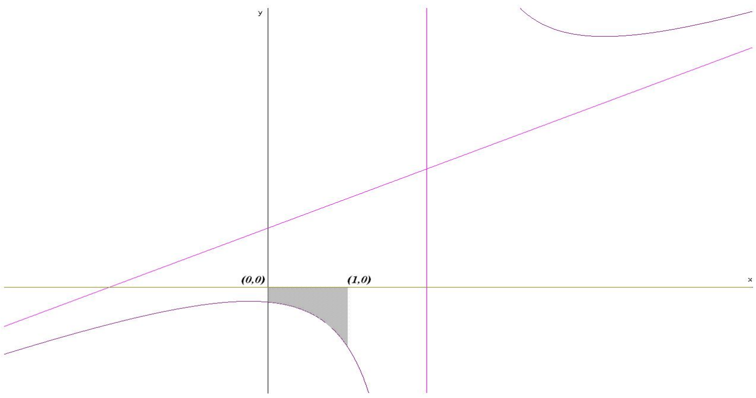
$$\text{Recta Normal}: \ y + 2 = \frac{1}{4}(x - 1)$$

10.

$$S_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x-2}\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + 2x + 5\ln|x-2|\right]_0^1 dx = \frac{5}{2} - 5\ln 2$$

$$S = |S_1| = 5\ln 2 - \frac{5}{2} = 0,9657\ u^2$$


y
Tangente: 4x + y - 2 = 0
Normal: x-4y-9=0
x


y
(0,0)
(1,0)
x