Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Noviembre 2010

Problema 1 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$
2. Calcular n que cumpla:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{2nx}=5$$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{3x+1}}{x-5}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{3x^3-10x-4}{x^3+x^2-7x+2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
2.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{2nx}=e^{2n}=5\Longrightarrow n=\frac{\ln 5}{2}$$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{3x+1}}{x-5}=\dfrac{7}{8}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{3x^3-10x-4}{x^3+x^2-7x+2}=\dfrac{26}{9}$

Problema 2 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y=(10x^3+1)^{12}$
2. $y=e^{3x^2+1}$
3. $y=e^x\sin x$
4. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}$
5. $y=\ln\left(\dfrac{x^2+8}{x^2-3}\right)$
6. $y=7^{x^2+1}$

7. $y = (x^2+2)^{x-1}$

Solución:

1. $y = (10x^3+1)^{12} \Longrightarrow y' = 12(10x^3+1)^{11}(30x^2)$
2. $y = e^{3x^2+1} \Longrightarrow y' = 6xe^{3x^2+1}$
3. $y = e^x \sin x \Longrightarrow y' = e^x \sin x + e^x \cos x$
4. $y = \dfrac{x^2+x-1}{x^2+2} \Longrightarrow \dfrac{(2x+1)(x^2+2)+(x^2+x-1)(2x)}{(x^2+2)^2}$
5. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+8}{x^2-3}\right) = \ln(x^2+8) - \ln(x^2-3) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2+8} - \dfrac{2x}{x^2-3}$
6. $y = 7^{x^2+1} \Longrightarrow y' = 2x7^{x^2+1}\ln 7$
7. $y = (x^2+2)^{x-1} \Longrightarrow y' = (x^2+2)^{x-1}\left(\ln(x^2+2) + \dfrac{2x(x-1)}{x^2+2}\right)$

Problema 3 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones en el punto de abcisa $x = 1$

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+2}$
2. $f(x) = e^{x^2+1}$

Solución:

1. $f(1) = 1,\ f'(x) = \dfrac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = \dfrac{1}{3}$

   Recta tangente: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x-1)$

   Recta normal: $y - 1 = -3(x-1)$

2. $f(1) = e^2,\ f'(x) = 2xe^{x^2+1} \Longrightarrow f'(1) = 2e^2$

   Recta tangente: $y - e^2 = 2e^2(x-1)$

   Recta normal: $y - e^2 = -\dfrac{1}{2e^2}(x-1)$