Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)

Junio 2011

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.
10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{3\}$
2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/3)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x + 1 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$.
3.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR
5. - Asíntotas:

- Verticales: En $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{-x+1}{x-3} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{-x+1}{x-3} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x+1}{x-3} = -1$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-3)^2} \neq 0$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos, además $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ la función es siempre creciente en el dominio de la función, en $R - \{3\}$

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

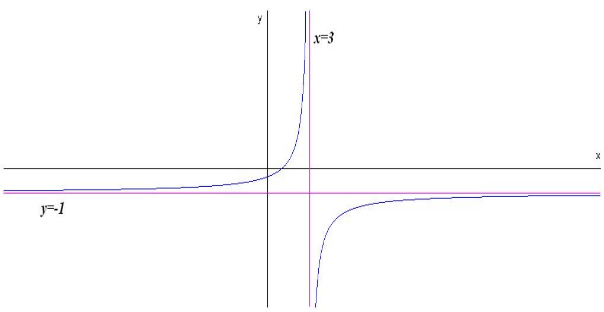
$$f''(x) = \frac{-4}{(x-3)^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puintos de inflexión.

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\cup$	convexa $\cap$

La función es convexa en el intervalo $(3, \infty)$ y cóncava en el intervalo $(-\infty, 3)$.

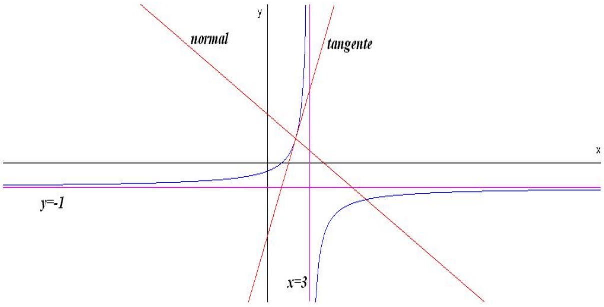
8. Representación gráfica



9. En $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 1$ y $m = f'(2) = 2$:

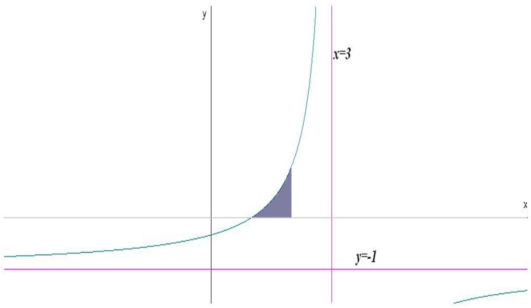
   Recta tangente: $y - 1 = 2(x - 2)$

   Recta normal: $y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$



10. Calcular el siguiente área:

$$S = \int_1^2 \frac{-x+1}{x-3}\,dx = \int_1^2 \left(-1 - \frac{2}{x-3}\right)dx =$$
$$= -x - 2\ln|x-3|\big]_1^2 = -1 + 2\ln 2 = 0,386\ u^2$$



$$\frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad x - 3 = A(x-1) + B \\ x = 1 \Longrightarrow B = -2 \\ x = 0 \Longrightarrow -3 = -A + B \Longrightarrow A = 1 \end{array}\right.$$