Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2009

Problema 1 Se está trazando una autovía y Luis se encuentra preocupado porque su casa se encuentra en la zona de construcción. Para resolver su incertidumbre se dirige a la oficinas del ingeniero de caminos que lleva el proyecto. Ante un mapa topográfico le enseña el proyecto, la carretera se ha dibujado teniendo en cuenta que cualquier punto de la curva equidista de la casa de Luis, que se encuentra en el punto $F(1,2)$, y la recta $r: x-y=0$. También se informa de que su casa tiene que tener una separación de la autovía superior a 500 metros por los ruidos.

Su antiguo y pesado profesor le preguntaría:

1. ¿Que curva describe el autovía?
2. Calcular su ecuación general.
3. Calcular las rectas tangente y normal a esta curva en $x=1$
4. ¿Hay algún motivo de preocupación?

(Nota: los valores de los puntos y representación de las rectas viene dado en kilómetros)

Solución:

1. Se trata de una parábola.
2. $$d(P,r) = |\overrightarrow{FP}| \Longrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow$$
$$x^2+y^2-4x-8y+2xy+10=0$$
3. $$y^2-6y+7=0 \Longrightarrow y=4,41, \ \ y=1,59$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y-2}{y+x-4}$$
En el punto $(1;4,41) \Longrightarrow m=-2,42$:
Recta Tangente: $y-4,41=-2,42(x-1)$

Recta Normal: $y-4,41=0,41(x-1)$

En el punto $(1;1,59) \Longrightarrow m=0,42$:

Recta Tangente: $y - 1,59 = 0,42(x - 1)$

Recta Normal: $y - 1,59 = -2,39(x - 2)$

4. La casa está en el punto $F(1,2)$ y la carretera pasa por el punto $(1; 1,59)$, la distancia entre estos dos puntos es de 0,41 kilómetros, luego hay motivos de preocupación.

Problema 2 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-1)$, $B(2,0)$ y $C(1,3)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$r: \left\{ \begin{array}{c} -n + p = -1 \\ 2m + p = -4 \\ m + 3n + p = -10 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -3/7 \\ n = -15/7 \\ p = -22/7 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{7}x - \frac{15}{7}y - \frac{22}{7} = 0 \Longrightarrow 7x^2 + 7y^2 - 3x - 15y - 22 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a = -3/7 \Longrightarrow a = 3/14 \\ -2b = -15/7 \Longrightarrow b = 15/14 \\ 22/7 = (3/14)^2 + (15/14)^2 - r^2 \Longrightarrow r = \frac{5\sqrt{34}}{14} \end{array} \right.$$

Problema 3 De una elipse horizontal centrada en el origen se conoce su excentricidad $e = \dfrac{1}{8}$ y su eje mayor de 6 cm. Se pide:

1. Calcular la longitud de sus ejes, la distancia focal, sus vértices y sus focos.

2. Calcular su ecuación general.

Solución:

1. $a = 3$

$$e = \frac{1}{8} = \frac{c}{3} \Longrightarrow c = \frac{3}{8}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = \frac{567}{64} \Longrightarrow b = \frac{\sqrt{567}}{8} = \frac{9}{8}\sqrt{7}$$

Eje Mayor: 6 cm, Eje Menor: $\dfrac{9}{4}\sqrt{7}$ cm, Distancia Focal: $\dfrac{3}{4}$ cm

Vértices: $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $B\left(0, \dfrac{9}{4}\sqrt{7}\right)$ y $B'\left(0, -\dfrac{9}{4}\sqrt{7}\right)$

Focos: $F(3/8, 0)$ y $F'(-3/8, 0)$

2.
$$\frac{x^2}{9} + \frac{64y^2}{567} = 1 \Longrightarrow 63x^2 + 64y^2 = 567$$

Problema 4 Sea la recta $r : 3x - y + 2 = 0$ y sea el punto $P(0, 1)$. Encontrar los puntos de la recta r que se encuentran a una distancia igual a $\sqrt{7}$ del punto P.

Solución:

Construimos una circunferencia de centro P y radio $\sqrt{7}$ y luego calculamos los puntos de corte de esta circunferencia con la recta r.

$$x^2 + (y-1)^2 = 7, \;\; r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 3) \\ P_r(0, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{array} \right.$$

$$\lambda^2 + (1 + 3\lambda)^2 = 7 \Longrightarrow 5\lambda^2 + 3\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0,53 \\ \lambda_2 = -1,13 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0,53 \\ \lambda_2 = -1,13 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P'(0,53; 3,59) \\ P''(-1,13; -1,39) \end{array} \right.$$