Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2010

Problema 1 Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $3x + y - 1 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -3) \\ A(0, 1) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (0, 1) + \lambda(1, -3)$
- Paramétrica:$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-3}$
- General: $3x + y - 1 = 0$
- Explícita: $y = -3x + 1$
- Punto pendiente: $y - 1 = -3x$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = -\dfrac{1}{6} \Longrightarrow \alpha = 108^{o}26'6''$

Problema 2 Si los puntos $A(-1, 0)$, $B(7, 2)$ y $C(3, 6)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular:

1. Su circuncentro.
2. La altura de C sobre el lado $\overline{AB}$. (Distancia de C a la recta determinada por los puntos A y B.

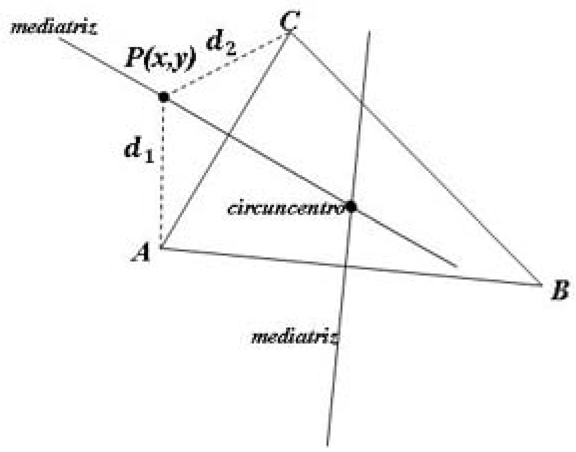
Solución:

1. Calculamos dos de sus mediatrices:
   - Mediatriz entre A y B:

     $$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} \Longrightarrow 4x + y - 13 = 0$$

   - Mediatriz entre A y C:

     $$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} \Longrightarrow 2x + 3y - 11 = 0$$



- Circuncentro:

$$\begin{cases} 4x + y - 13 = 0 \\ 2x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

2. Calculamos la recta que une A con B:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (8, 2) \\ A(-1, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : x - 4y + 1 = 0$$

Calculo la distancia de $C(3, 6)$ a la recta r:

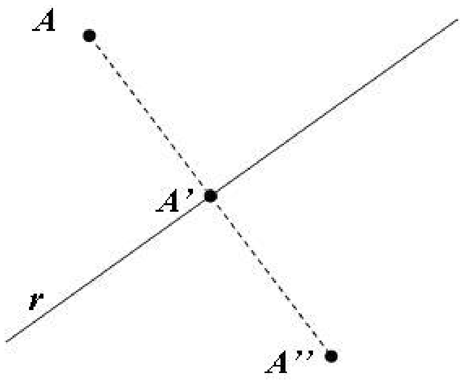
$$d(C, r) = \frac{|3 - 24 + 1|}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{20\sqrt{17}}{17}\, u$$

Problema 3 Sea el punto $A(3, 6)$ y la recta $r : x - 2y + 5 = 0$. Se pide calcular:

1. Una recta paralela a r que pase por el punto A.
2. Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.
3. El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

Solución:

1. $x - 2y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 3 - 12 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 9$. La recta buscada es $x - 2y + 9 = 0$
2. $2x + y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 6 + 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -12$. La recta buscada es $2x + y - 12 = 0$
3. Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta s perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y s:

$$\left\{ \begin{array}{l} r : x - 2y + 5 = 0 \\ s : 2x + y - 12 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow A'\left(\frac{19}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{38}{5}, \frac{44}{5}\right) - (3, 6) = \left(\frac{23}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

Problema 4 Dadas las rectas $r : x + 5y - 2 = 0$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \end{array} \right.$, se pide calcular:

1. Su punto de corte.
2. Ángulo que forman.
3. Sus bisectrices.

Solución:

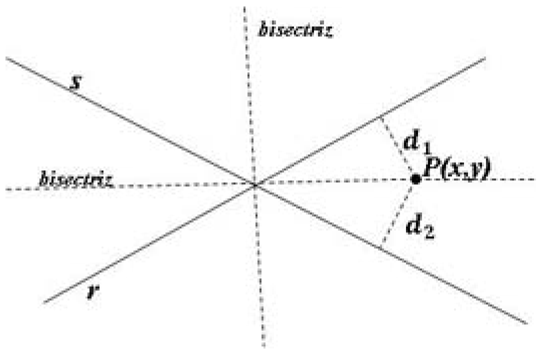
1. $(1 + \lambda) + 5(2\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{11} \Longrightarrow \left(\dfrac{12}{11}, \dfrac{2}{11}\right)$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} r : x + 5y - 2 = 0 \Longrightarrow (1, 5) \\ s : 2x - y - 2 = 0 \Longrightarrow (2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{26}\sqrt{5}} \Longrightarrow \alpha = 105^{o}15'19''$$

3.

$$d(P, r) = d(P, s) \Longrightarrow \frac{|x + 5y - 2|}{\sqrt{26}} = \frac{|2x - y - 2|}{\sqrt{5}}$$



- $x + 5y - 2 = 2,28(2x - y - 2) \Longrightarrow 89x - 182y = 64$
- $x + 5y - 2 = -2,28(2x - y - 2) \Longrightarrow 139x + 68y = 164$