Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2010

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$.
10. Calcular una recta tangente a la gráfica de f paralela a la recta de ecuación: $y = -\dfrac{9}{32}x - 1$
11. Calcular el área encerrada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ No hay.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow \ x = -2 \Longrightarrow \ (0, -2)$.
3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, +\infty)$
signo	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6.

$$f'(x) = -\frac{6x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow -6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$+$	$-$
y	Creciente	Decreciente

La función es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

La función es decreciente en: $(0, 1) \cup (1, \infty)$

La función presenta un máximo en el punto $(0, -2)$.

7.

$$f''(x) = \frac{18x^2+6}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

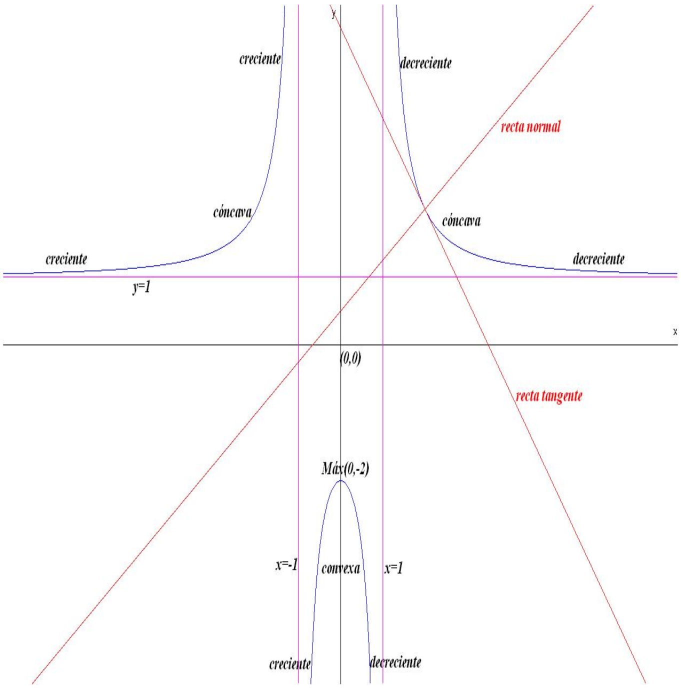
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, +\infty)$
y''	$+$	$-$	$+$
y	cóncava	convexa	cóncava

Convexa: $(-1, 1)$

Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

8. Representación



9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:

   Como $f(2) = 2$ las rectas pasan por el punto $(2, 2)$.

   Como $m = f'(2) = -4/3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

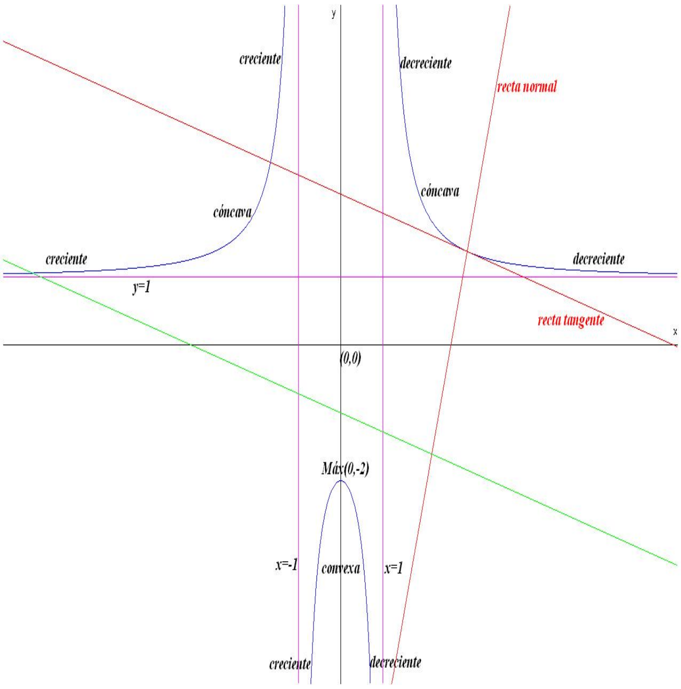
$$\text{Recta Normal}: \; y - 2 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

10. $y = -\dfrac{9}{32}x - 1 \Longrightarrow m = -\dfrac{9}{32}$

$$m = f'(a) = -\frac{6a}{(a^2 - 1)^2} = -\frac{9}{32} \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow b = f(3) = \frac{11}{8}$$

Una recta tangente sería:

$$y - \frac{11}{8} = -\frac{9}{32}(x-3)$$



11.

$$F(x) = \int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2-1}\right)\,dx = x + \frac{3}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C$$

$$\int_2^3 \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx = F(3) - F(2) = \frac{2 + 3\ln(3/2)}{2}\,u^2$$