Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Diciembre 2009

Problema 1 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$
2. $y = e^{x^2+5} \cdot \sin x$
3. $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$
4. $y = (x^2+5)^{\cos x}$
5. $y = (\ln x)^5$
6. $y = 2^{\cos x}$
7. $y = e^{x^2-1}$
8. $y = \log_5(x^2+2)$

Solución:

1. $y' = \dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$
2. $y' = 2xe^{x^2+5} \cdot \sin x + e^{x^2+5} \cdot \cos x$
3. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{2}{x}$
4. $y' = (x^2+5)^{\cos x}\left(-\sin x \ln(x^2+5) + \cos x \frac{2x}{x^2+5}\right)$
5. $y' = 5(\ln x)^4 \dfrac{1}{x}$
6. $y' = -\sin x 2^{\cos x} \ln 2$
7. $y' = 2xe^{x^2-1}$
8. $y' \dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$

Problema 2 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}$ en $x = 1$

2. $f(x) = e^{x+1}$ en $x = -1$

Solución:

1. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+10}{(x^2+5)^2} \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{2}{9}$ y $f(1) = \dfrac{1}{3}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}(x-1)$

   Recta Normal: $y - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{9}{2}(x-1)$

2. $f'(x) = e^{x+1} \Longrightarrow f'(-1) = 1$ y $f(-1) = 1$

   Recta Tangente: $y - 1 = x + 1 \Longrightarrow x - y + 2 = 0$

   Recta Normal: $y - 1 = -x - 1 \Longrightarrow x + y = 0$

Problema 3 Dados los números complejos $z = 1 + 2i$ y $w = 1 - i$ calcular:

1. $z + w$
2. $z \cdot w$
3. $\dfrac{z}{w}$

Solución:

1. $z + w = 2 + i$
2. $z \cdot w = 3 + i$
3. $\dfrac{z}{w} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

Problema 4 Dado el número complejo $z = 2 - i$ calcular:

1. z^{20}
2. $\sqrt[3]{z}$

Solución:

$$z = 2 - i = \sqrt{5}_{333^{\circ}26'6''} = \sqrt{5}(\cos 333^{\circ}26'6'' + i \sin 333^{\circ}26'6'')$$

1.

$$z^{20} = \left(\sqrt{5}\right)^{20}_{20\cdot 333^{\circ}26'6''} = 5^{10}_{6668^{\circ}42'} = 5^{10}_{188^{\circ}42'} = 5^{10}(\cos 188^{\circ}42' + i \sin 188^{\circ}42')$$

2.

$$\sqrt[3]{z} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}\right)_{\frac{333^{\circ}26'6''+2k\pi}{3}} =$$

$$\begin{cases} k=0 \Longrightarrow \left(\sqrt[6]{5}\right)_{111^{\circ}8'42''} = \sqrt[6]{5}(\cos 111^{\circ}8'42'' + i\sin 111^{\circ}8'42'') \\ k=1 \Longrightarrow \left(\sqrt[6]{5}\right)_{231^{\circ}8'42''} = \sqrt[6]{5}(\cos 231^{\circ}8'42'' + i\sin 231^{\circ}8'42'') \\ k=2 \Longrightarrow \left(\sqrt[6]{5}\right)_{351^{\circ}8'42''} = \sqrt[6]{5}(\cos 351^{\circ}8'42'' + i\sin 351^{\circ}8'42'') \end{cases}$$